STEVEN SPIELBERG DIGITAL YIDDISH LIBRARY
NO. 05006

ALGEBRE

A. Kiselev

*Permanent preservation of this book was made possible
by Mr. & Mrs. Peter Jakes
in memory of
Rose Yankelevich Friedman*

NATIONAL YIDDISH BOOK CENTER
AMHERST, MASSACHUSETTS

NATIONAL YIDDISH BOOK CENTER
AMHERST, MASSACHUSETTS
413 256-4900 | YIDDISH@BIKHER.ORG
WWW.YIDDISHBOOKCENTER.ORG

•

MAJOR FUNDING FOR THE
STEVEN SPIELBERG DIGITAL YIDDISH LIBRARY
WAS PROVIDED BY:

Lloyd E. Cotsen Trust
Arie & Ida Crown Memorial
The Seymour Grubman Family
David and Barbara B. Hirschhorn Foundation
Max Palevsky
Robert Price
Righteous Persons Foundation
Leif D. Rosenblatt
Sarah and Ben Torchinsky
Harry and Jeanette Weinberg Foundation
AND MEMBERS AND FRIENDS OF THE
National Yiddish Book Center

•

The *goldene pave*, or golden peacock, is a traditional symbol of Yiddish creativity. The inspiration for our colophon comes from a design by the noted artist Yechiel Hadani of Jerusalem, Israel.

The National Yiddish Book Center respects the copyright and intellectual property rights in our books. To the best of our knowledge, this title is either in the public domain or it is an orphan work for which no current copyright holder can be identified. If you hold an active copyright to this work – or if you know who does – please contact us by phone at 413-256-4900 x153, or by email at digitallibrary@bikher.org

א. קיסעליאָוו

אלגעברע

לערנבוך פאר דער מיטלשול

צווייטער טייל

8 און 9 שוליאָר

באשטעטיקט דורך דער קאָלעגיע
באם פאָלקאָמבילד רספסר

איבערזעצט פונ דער 11־טער
איבערגעארבעטער רוסישער אופלאגע

מעלוכע־פארלאג פונ ווײַסרוסלאנד
נאצסעקטער

1934 מינסק

איבערזעצער אונ פאראנטוואָרטלעכער רעדאקטער — י. גאָלדבערג.
סטילקאָרעקטור — א. גאָלדשטײנ.
קאָרעקטער — ש. טײַצ.
טעכרעדאקטער — ע. בעלקינ.
פאראנטוו. קאָרעקטער פונ דרוקערײַ — שטריקמאנ.

אָפגעגעבנ אינ דרוק 5/I 34 י. אונטערגעשריבנ צומ דרוק 5/IV 34 י. פאפיר 94 × 26.
טיראזש 3000 עקז. באפולמעכטיקטער פונ גלאװליטבעל נומ. 1006.

דרוקערײַ א. ג. סטאלינ. באשטעלונג 100.

פאָרוואָרט.

קעדיי דאָס לערנבוך זאָל אנטשפּרעכן די נײַע פּראָגראַמעס פון פאָלקאָמבילד, זײַנען אין דער נײַער אופלאגע געמאכט געוואָרן אייניקע ענדערונגען אין פארגלײַך מיט דער פאָריקער. די וויכטיקסטע ענדערונגען זײַנען די פאָלגנדיקע:

1) עס איז צוגעגעבן געוואָרן: די דערהייבונג פון א פילגליד אין קוואדראט, די אויספאָרשונג פון גלײַכונגען און די געאָמעטרישע פאָרשטעלונג פון קאָמפּלעקס-צאָלן.

2) ס'איז טיילווײַז געענדערט געוואָרן די אָרדענונג פון די אָפּטיילן: בעזוס טעאָרעמע, אומגלײַכקײַטן און אומבאשטימטע גלײַכונג זײַנען איבערגעטראָגן פון די „צוגאָבן“ אין דעם גרונט-טעקסט פון בוך (אין פארבינדונג דערמיט איז אויסגעקומען צו ענדערן די נומעראציע פון די פּאראגראפן).

3) עס איז באדײַטנדיק פארגרעסערט געוואָרן די צאָל געניטונגען און עס זײַנען געגעבן געוואָרן ענטפערס אף אלע געניטונגען.

4) אייניקע צייכענונגען זײַנען פארבעסערט געוואָרן, אייניקע נײַע צוגעגעבן.

קעדיי צו געבן די מעגלעכקײַט צוגלײַך מיט דער נײַער אופלאגע פון דער אלגעברע צו באנוצן זיך אויך מיט דער אלטער, איז אײַנגעהאלטן צוזאמען מיט דער נײַער נומעראציע פון די פּאראגראפן און געניטונגען אויך די אלטע נומעראציע; דערבײַ זײַנען די אלטע נומערן גענומען אין קלאמערן [1].

---

[1] צוליב דעם, וואָס דאָס ביכל דערשײַנט אין יידיש צום ערשטן מאָל, ווערט געגעבן בלויז די נײַע נומעראציע פון די פּאראגראפן.

פארלאג.

ערשטער אָפּטייל.

אידענטישע אומבילדונגען מיט מאדרייגעס און וואָרצלען.

I. דערהייבן אין א מאדרייגע.

1. אקט פון דערהייבן אין א מאדרייגע. אין אָנהייב קורס האָבן מיר שוין געזען, אז דאָס דערהייבן אין א מאדרייגע איז אן אקט, דורך וועלכן איין געגעבענע צאָל (דער באזיס פון דער מאדרייגע) ווערט גענומען ווי א מיטקייפלער אזויפיל מאָל, וויפל איינסן עס אנטהאלט די צווייטע געגעבענע צאָל (דער מאדרייגע־ווייזער).

צום ביישפיל:

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5=32;\quad (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=(-3)^4=81;$$
$$a\cdot a\cdot a=a^3.$$

אין אלגעמיין:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{n\ \text{מאָל}}=a^n$$

פון דער עצעם דעפיניציע פונעם אקט קאָן מען זען, אז דער מאדרייגע־ווייזער מוז זיין א צאָל א גאנצע און א פּאָזיטיווע. אין די ווייטערדיקע אָפּהאנדלונגען, באגעגענענדיק זיך מיט א בוכשטאביקן ווייזער, וועלן מיר שטענדיק אונטער אים פארשטיין א גאנצע פּאָזיטיווע צאָל.

2. די מאדרייגע פון א נעגאטיווער צאָל. באם קייפלען רעלאטיווע צאָלן האָבן מיר געזען, אז דער קייפל־פּראָדוקט איז א פּאָזיטיווער, ווען די צאָל נעגאטיווע קייפלערס איז א גראָדע. אין פארקערטן פאל וועט דער קייפל־פּראָדוקט זיין א נעגאטיווער.

אָנווענדנדיק אָט די אייגנשאפט צום קייפל־פּראָדוקט פון גלייכע נעגאטיווע מיט־קייפלערס, ד. ה. צום דערהייבן אין מאדרייגע א נעגאטיווע צאָל, האָבן מיר באקומען דעם קלאל (ערשטער טייל, § 30):

יעדער גראָדע מאדרייגע פונ א נעגאטיווער צאָל איז פּאָזיטיוו, יעדער אומגראָדע — נעגאטיוו.

צום ביַישפּיל:

$$(-2)^2 = 4;\quad (-2)^6 = 64;\quad (-5)^4 = 625;$$

$$(-2)^5 = -32;\quad (-2)^7 = -128;\quad (-5)^5 = -3\,125$$ א.א.וו.

3. דערהייבנ אינ א מאדרייגע איינגלידער. אינעם ערשטנ טייל האָבנ מיר ארויסגעפירט דעם קלאל פונ דערהייבנ אנ איינגליד אינ קוואדראט אונ אינ קוב. איצט וועלנ מיר וויַיזנ, אז לויט די זעלביקע קלאָלימ דערהייבט מענ אנ איינגליד אינ יעטווידער מאדרייגע.

א) מיר וועלנ דערהייבנ אינ דער מאדרייגע n דעמ קייפל־פּראָדוקט abc. באנוצנדיק זיכ מיט די באוווסטע אייגנשאפטנ פונ קייפל, באקומענ מיר:

$$(abc)^n = \underbrace{(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)\ldots(abc)}_{n \text{ מאָל}} = abc\cdot abc\ldots abc =$$

$$= \underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ מאָל}}\underbrace{(bb\ldots b)}_{n \text{ מאָל}}\underbrace{(cc\ldots c)}_{n \text{ מאָל}} = a^n b^n c^n.$$

קעדיי צו דערהייבנ א קייפל־פּראָדוקט אינ א מאדרייגע, דארפ מענ דערהייבנ אינ דער דאָזיקער מאדרייגע יעדער מיטקייפלער באזונדער אונ די רעזולטאטנ איבערקייפלענ.

ב) מיטנ זעלביקנ מעטאָד קאָנענ מיר געפינענ די מאדרייגע פונ דער ברוכצאָל $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ מאָל}} = \frac{a\cdot a\ldots a}{b\cdot b\ldots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

קעדיי צו דערהייבנ א ברוכצאָל אינ א מאדרייגע, דארפ מענ דערהייבנ אינ דער דאָזיקער מאדרייגע באזונדער דעמ ציילער אונ באזונדער דעמ וויַיזער אונ דעמ ערשטנ רעזולטאט צעטיילנ אפ דעמ צווייטנ.

ג) עס פאָדערט זיכ צו דערהייבנ אינ דער מאדרייגע n די צאָל a^m. מיר וועלנ האָבנ:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\ldots a^m}_{n \text{ מאָל}} = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

קעדיי צו דערהייבנ די מאדרייגע פונ א וועלכער עס איז צאָל אינ אנ אנדער מאדרייגע, דארפ מענ איבערקייפלענ די מאדרייגע־וויַיזערס.

ד) מיר וועלנ איצט נעמענ א וועלכנ עס איז איינגליד, צומ ביַישפּיל $2a^2b^3$. לאָמיר אימ דערהייבנ אינ א וועלכער עס איז מאדרייגע n. אָנווענדנדיק די נאָר וואָס ארויסגעפירטע קלאָלימ, וועלנ מיר באקומענ:

$$(2a^2b^3)^n = 2^n a^{2n} b^{3n}.$$

קערײַ צו דערהײבן אַן אײנגליד אין אַ מאַדרײגע, דאַרף מען דערהײבן אין דער דאָזיקער מאַדרײגע דעם קאָעפיציענט, און די בוכשטאַב־װײַזערס קײפּלען אָפּן װײַזער פון דער מאַדרײגע, אין װעלכער עס װערט דערהײבן דער אײנגליד.

געניטונגען.

דערהײבט אין אַ מאַדרײגע:

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0{,}1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^3b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(-\frac{0{,}2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

די דערהײבונג פון אַ פילגליד אין קװאַדראַט.

4. **די אַרױספירונג פון דער פאָרמולע.** באַנוצנדיק זיך מיט דער פאָרמולע:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

קענען מיר דערהײבן אין קװאַדראַט דעם דרײַגליד $a+b+c$, באַטראַכטנדיק אים, װי אַ צװײגליד: $(a+b)+c$.

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2$$

הײסט דאָס, װען מיר האָבן צוגעגעבן צום צװײגליד $a+b$ אַ דריטן גליד, זײַנען צום קװאַדראַט צוגעקומען נאָך צװײ גלידער:

1) דער דאָפּעלער קײפּל־פּראָדוקט פון דער סומע פון די ערשטע צװײ גלידער אױפן דריטן און 2) דער קװאַדראַט פון דעם דריטן גליד.

לאָמיר צום דרײַגליד $a+b+c$ צוגעבן נאָך אַ פערטן גליד און דערהײבן דעם פירגליד $a+b+c+d$ אין קװאַדראַט, אָננעמענדיק די סומע $a+b+c$ פאַר אײן גליד:

$$[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

אונטערשטעלנדיק אָנשטאָט $(a+b+c)^2$ דעם פריִער געפונענעם אױסדרוק, באַקומען מיר:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+$$
$$+2(a+b+c)d+d^2.$$

מיר באַמערקן װידער, אַז װען מע גיט צו אַ נײַעם גליד צום פילגליד, װאָס װערט דערהײבן אין קװאַדראַט, קומען צו צום פילגליד צװײ גלידער: 1) דער דאָפּעלער קײפּל־פּראָדוקט פון דער סומע פון די פריִערדיקע גלידער אױפן נײַעם גליד און 2) דער קװאַדראַט פון נײַעם גליד. קלאָר, אַז אַזױ װעלן צוקומען צו צװײ נײַע

גלידער אויכ ווײַטער, ווענ מע וועט צוגעבנ נײַע גלידער צום פּילגליד, וואָס ווערט דערהייבנ אינ קוואַדראַט. אזוי ארום, האָבנ מיר:

דער קוואדראט פונ א פּילגליד איז גלײַכ: צום קוואדראט פונ ערשטנ גליד, פּליוס דעם דאָפּעלנ קייפל־פּראָדוקט פונ דעם ערשטנ גליד אפנ צווייטנ, פּליוס קוואדראט פונ צווייטנ גליד, פּליוס דעם דאָפּעלנ פּראָדוקט פונ דער סומע פונ די ערשטע צוויי גלידער אפנ דריטנ, פּליוס קוואדראט פונ דריטנ, פּליוס דעם דאָפּעלנ פּראָדוקט פונ דער סומע פונ די ערשטע דרײַ גלידער אפנ פערטנ, פּליוס קוואדראט פונ פערטנ א. א. וו.

פארשטייט זיכ, די גלידער פונ א פּילגליד קענענ זײַנ אויכ נעגאטיווע.

אויב אינ דעם רעכטנ טייל פונ דער לעצטער גלײַכקײַט וועלנ מיר עפענענ די קלאמערנ, איז באקומט זיכ:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+$$
$$+2bd+2cd+d^2$$

אָדער, איבערשטעלנדיק די גלידער

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$$
$$+2bc+2bd+2cd.$$

מע קענ דעריבער דעם קלאל פונ דערהייבנ א פּילגליד אינ קוואדראט פאָר־מולירנ אזוי:

דער קוואדראט פונ א פּילגליד איז גלײַכ צו דער סומע פונ די קוואדראטנ פונ אלע זײַנע גלידער, צונויפגעלייגט מיט די דאָפּעלע קייפל־פּראָדוקטנ פונ יעדער גליד אפ אלע, וואָס גייענ נאָכ אים.

5. באמערקונג וועגנ די צייכנס. אינ ענדגילטיקנ רעזולטאט וועלנ זײַנ מיטנ צייכנ פּליוס, ערשטנס, די קוואדראטנ פונ אלע גלידער פונ דעם פּילגליד, אונ, צווייטנס, יענע דאָפּעלע קייפל־פּראָדוקטנ, וואָס זײַנענ ארויסגעקומענ פונ קייפלענ גלידער מיט גלײַכע צייכנס.

צום בײַשפּיל:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+2(3x^2)(-2x)+(-2x)^2+2(3x^2-2x)\cdot 1+1=$$
$$=9x^4-12x^3+4x^2+6x^2-4x+1.$$

געניטונגענ.

4. $(2a^2-1a+1)^2$. 5. $\left(\frac{1}{2}x^2-4x-3\right)^2$.

6. $(-3a^3x+3a^2x^2-ax^3+3x^2)^2$.

7. $\left(0{,}3x^3-0{,}1x^2-\frac{3}{4}x+0{,}5\right)^2$.

איבערצײַגט זיכ אפ די פאָלגנדיקע צוויי בײַשפּילנ, אז דער קוואדראט פונ א פילגליד וועט זיכ ניט ענדערנ, אויב מיר וועלנ ענדערנ די צייכנס פונ אלע זײַנע גלידער אפ קעגנזעצלעכע:

8. $(a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2$.

9. $(2x^3 - x^2 - 3x + 1)^2 = (-2x^3 + x^2 + 3x - 1)^2$.

10. אויב עס איז ריכטיק די גלײַכקײַט:

$$(a - b)^2 = (m - n)^2,$$

צי קענ מענ דערפונ מאכנ אנ אויספיר, אז

$$(a - b) = (m - n)?$$

II. ארויסציִענ א וואָרצל.

6. דעפיניציע. א וואָרצל פונ n-טער מאדרייגע פונ דער געגעבענער צאָל a ווערט אָנגערופנ אזא צאָל, וועלכע וועט, זײַענדיק דערהייבנ אינ דער מאדרייגע n, געבנ a.

א וואָרצל פונ דער n-טער מאדרייגע פונ דער צאָל a ווערט אָנגעשריבנ אזוי: $\sqrt[n]{a}$. פונ דער עצעם דעפיניציע דרינגט ארויס, אז

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

אָט די גלײַכקײַט קענ דינענ אפ קאָנטראָלירנ די ריכטיקײַט פונ דעם דורכגעפירטנ אקט באם ארויסציִענ א וואָרצל. מיר האָבנ, צום בײַשפּיל, געפונענ, אז

$$\sqrt[11]{2048} = 2.$$

קעדיי צו קאָנטראָלירנ, וועלנ מיר דערהייבנ 2 אינ דער עלפטער מאדרייגע, באקומענ מיר טאקע $2^{11} = 2048$. הייסט עס, דער וואָרצל איז געפונענ ריכטיק.

דאָסגלײַכנ $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$, ווײַל $2{,}5^4 = 39{,}0625$.

7. איראציאָנעלע צאָלנ. מיר האָבנ געזענ, אז באם ארויסציִענ א קוואדראט־וואָרצל פונ א צאָל, קענ ניט אינ א גאנצער ריי פאַלנ דער קוואדראט־וואָרצל פינקטלעכ ארויסגעדריקט ווערנ ניט דורכ א גאנצער צאָל, ניט דורכ א ברוכצאָל. מיר וועלנ ווײַזנ, אז אזעלכע צאָלנ קענענ זיכ באקומענ אויכ באם ארויסציִענ א וואָרצל פונ יעטווידער מאדרייגע.

טעאָרעמע. אויב דער וואָרצל פונ דער n־טער מאדרייגע פונ א גאנצער צאָל קענ ניט ארויסגעדריקט ווערנ דורכ א גאנצער צאָל, קאָנ ער אויכ ניט ארויסגעדריקט ווערנ דורכ א ברוכצאָל.

לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ פארקערט, אז $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$, ווו a איז א גאנצע צאָל, $\frac{p}{q}$ איז ניט קיינ פארקירצלעכע ברוכצאָל (אונטער דעם ציילער p אונ דעם ווײַזער q

פארשטייענ מיר גאנצע צאָלנ, ווײַל, אויב אנדערש, וואָלטנ מיר זיי געקענט ברענגענ צו א גאנצער געשטאלט).

פונ דער דעפיניציע פונעמ אקט פונ ארויסציִענ א וואָרצל דרינגט ארויס:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = a\,,$$

אָדער $\frac{p^n}{q^n} = a\,.$

אָבער p אונ q, אונ פאָלגלעכ, p^n אונ q^n האָבנ ניט קיינ אלגעמיינע קייפלערס. הייסט דאָס, דער לינקער טייל פונ אונדזוער גלײַכקײַט שטעלט מיט זיכ פאָר א ניט-פארקירצלעכע ברוכצאָל, אונ דער רעכטער — א גאנצע צאָל. אזא גלײַכקײַט איז אומעגלעכ; אזוי ארום, איז אונדזער פאָרשטעלונג, אז $\sqrt[n]{a}$ קאָנ זײַנ גלײַכ צו דער ברוכצאָל $\frac{p}{q}$, געווענ ניט ריכטיק. די טעאָרעמע איז באוויזנ.

צומ בײַשפיל $\sqrt[3]{3}$ ווערט ניט אויסגעדריקט דורכ א גאנצער צאָל. לויט דער טעאָרעמע, וואָס מיר האָבנ דערוויזנ, קאָנ עס אויכ ניט אויסגעדריקט ווערנ דורכ א ברוכצאָל.

מיר וועלנ באלד זענ, אז אזעלכע וואָרצלענ קענ מענ געפינענ בלויז אומגעפער. מיר וועלנ זיי אָנרופנ איראציִאָנעלע צאָלנ (גאנצע צאָלנ אונ ברוכצאָלנ טראָגנ דעמ אלגעמיינעמ נאָמענ ראציִאָנעלע צאָלנ).

8. אומגעפערע וואָרצלענ פונ יעטווידער מאדרייגע. מיר האָבנ שוינ געזאָגט, וואָס זײַנענ אזוינס אומגעפערע קוואדראט-וואָרצלענ מיט דער פינקטלעכקײַט ביז 1, ביז $\frac{1}{10}$ א. א. וו. אונ וויִאזוי עס ווערנ געפונענ די דאָזיקע וואָרצלענ. דאָס אלצ, וואָס איז געזאָגט געוואָרנ וועגנ א קוואדראט-וואָרצל, קאָנ אויכ אָנגעווענדט ווערנ צומ וואָרצל פונ יעטווידער אנדער מאדרייגע. צומ בײַשפיל, אומגעפערער $\sqrt[3]{2}$ מיט א פינקטלעכקײַט ביז $\frac{1}{100}$ הייסט אזא געצענטלטע ברוכצאָל, וועלכע באַשטייט פונ גאנצע, צענטלעכ אונ הונדערטלעכ, דער קוב פונ וועלכער איז קלענער פונ 2, אָבער, אויב מיר וועלנ זי פארגרעסערנ אפ $\frac{1}{100}$ אונ דערהייבנ אינ קוב, וועלנ מיר באקומענ מער פונ 2. מיר וועלנ ניט ארויספירנ קיינ קלאָלימ אפ צו געפינענ פינקטלעכע אונ אומגעפערע וואָרצלענ פונ קובישע אונ אנדערע מאדרייגעס, מיר וועלנ זיכ באגרענעצנ בלויז מיט אָנווײַזנ פאָלגנדיקנ איינפאכנ מיטל אפ צו געפינענ אזעלכע וואָרצלענ.

עס פאָדערט זיכ צו געפינענ $\sqrt[3]{2}$. קלאָר, אז די אומגעפערע וואָרצלענ מיט א פינקטלעכקײַט ביז 1 וועלנ זײַנ די צאָלנ 1 (מיט א מאנגל), 2 (מיט אנ איבערפלוס). קעדיי צו געפינענ דעמ ציפער פונ די צענטלאָקימ פונעמ געזוכטנ וואָרצל, וועלנ מיר געפינענ אינ דער שורע:

1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2

צוויי אזעלכע אינ ריי שטייענדיקע צאָלנ, אז דער קוב פונ דער לינקער צאָל זאָל זײַנ קלענער פונ 2, אונ דער קוב פונ דער רעכטער זאָל זײַנ גרעסער פונ 2. צוליב דעם וועלנ מיר נעמענ פונ די צאָלנ פונ אונדזער שורע די מיטעלע 1,5 אונ מיר וועלנ זי דערהייבנ אינ קוב. מיר וועלנ געפינענ:

$$1{,}5^3 = 3{,}375,$$

וועלכע איז גרעסער פונ 2. אזויווי די צאָלנ, וועלכע שטייענ רעכטס פונ 1,5, גיבנ באַם דערהייבנ אינ קוב נאָכ מער, קענענ מיר אָפּוואַרפנ די גאנצע רעכטע העלפט פונ דער שורע אונ אויספּרוּווּנ נאָר די צאָלנ:

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4.$$

מיר וועלנ נעמענ די מיטלסטע פונ זיי 1,2 אונ דערהייבנ זי אינ קוב. מיר וועלנ באַקומענ 1,728, וואָס איז קלענער פונ 2. הייסט עס, אז איצט דארפ מענ אויספּרוּווּנ נאָר די צאָלנ 1,3 אונ 1,4. דערהייבנדיק אינ קוב די צאָל 1,3, וועלנ מיר באַקומענ 2,197, וועלכע איז גרעסער פונ 2. מיר האָבנ, אפ אזא אויפנ, באַקומענ 2 צאָלנ: 1,2 אונ 1,3, וועלכע אונטערשיידנ זיכ בלויז אפ 0,1 אונ וואָס צווישנ די קובנ זייערע אנטהאַלט זיכ די צאָל 2. דאָס וועלנ זײַנ די אומגעפערע קובישע וואָרצלענ פונ 2 מיט א פּינקטלעכקײַט ביז $\frac{1}{10}$ מיט א מאנגל אונ אנ איבערפלוס. ווענ מיר ווילנ געפינענ דעם ציפער פונ די הונדערטלעכ, דארפנ מיר אויספּרוּווּנ פאָלגנ־דיקע צאָלנ:

$$1{,}21;\ 1{,}22;\ 1{,}23;\ldots;\ 1{,}29.$$

נעמענדיק אינ דער דאָזיקער שורע די מיטעלע צאָל 1,25 אונ דערהייבנדיק זי אינ קוב, וועלנ מיר געפינענ $1{,}25^3 = 1{,}953125$, וועלכע איז קלענער פונ 2. הייסט עס, איצט דארפ מענ אויספּרוּווּנ נאָר די צאָלנ:

$$1{,}26;\ 1{,}27;\ 1{,}28;\ 1{,}29.$$

אזויווי $1{,}25^3$ שיידט זיכ ווייניק אונטער פונ 2, איז זייער מעגלעכ, אז $1{,}26^3$ וועט זײַנ גרעסער פונ 2. אונ ווירקלעכ, דערהייבנדיק 1,26 אינ קוב, וועלנ מיר באַקומענ 2,000376. הייסט עס, אז דער געזוכטער קובישער וואָרצל פונ 2, מיט דער פּינקטלעכקײַט ביז $\frac{1}{100}$, וועט זײַנ 1,25 (מיט א מאנגל) אָדער 1,26 (מיט אנ איבערפלוס). ווענ מיר זאָלנ ווײַטער וועלנ געפינענ דעם ציפער פונ די טויזנטלעכ, וואָלטנ מיר דארפנ אפ דעם זעלבנ אויפנ אויספּרוּווּנ די צאָלנ פונ דער שורע:

$$1{,}251;\ 1{,}252;\ 1{,}253;\ldots;\ 1{,}259.$$

פארשטייט זיכ, אז דער דאָזיקער מיטל איז זייער א שווערער (עס זײַנענ פאראַנ גרינגערע [1]), נאָר פונ אים זעט מענ דײַטלעכ, אז די געצעגנטלטע ציפערנ פונ די אומגעפערע וואָרצלענ פונ יעטווידער מאדרייגע קענענ געפונענ ווערנ מיט א באַלי־ביקער פּינקטלעכקײַט.

[1]) די וואָרצלענ פונ אלע מאדרייגעס ווערנ זייער איינפאכ ארויסגערעכנט, ווי מיר וועלנ עס שפּע־טער זענ, דורכ לאָגאריטמענ.

9. **איראציאָנעלע צאָלן אפ דער צאָל־אקס.** מיר וועלן אויסרעכענען די באַדײַטונג פון $\sqrt{3}$ מיט א פינקטלעכקײַט ביז $\frac{1}{10}$, ביז $\frac{1}{100}$, ביז $\frac{1}{1000}$... די דאָזיקע באַדײַטונגען וועלן זײַן:

1,7; 1,73; 1,732; 1,7320 (מיט א מאנגל);

1,8; 1,74; 1,733; 1,7321 (מיט אן איבערפלוס).

$$\sqrt{3} = 1{,}7320...$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
27 & 20'0 \\
7 & 189 \\
343 & 110'0 \\
3 & 1029 \\
3462 & 710'0 \\
2 & 6924 \\
34640 & 1760'0
\end{array}$$

מיר וועלן פאַרשטעלן אָט די אַלע צאָלן אפ דער צאָל־גראַדער. צוליב דעם וועלן מיר אָננעמען וועלכן ניט איז פונקט A פון א וועלכער ניט איז גראַדער (געמעל 1) פארן אָנהייב פון די אָפשניטן און, אָננעמענדיק א וועלכן עס איז לענג־איינס, וועלן מיר אָפלייגן אפ דער גראַדער אָפשניטן:

$$Ab_1 = 1{,}7;\quad Ab_2 = 1{,}73$$

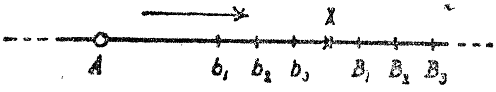
א. א. וו.

נאָכדעם די אָפשניטן:

$$AB_1 = 1{,}8;\quad AB_2 = 1{,}74$$

א. א. וו.

אזוי־ווי יעדער אומגעפערער וואָרצל מיט א מאנגל איז קלענער פון יעדער אומגעפערן וואָרצל מיט אן איבערפלוס (ווײַל דער קוואדראט פונעם ערשטן איז קלענער פון 3, און דער קוואדראט פונעם צווייטן איז גרעסער פון 3), דארף יעדער פונקט b ליגן לינקס פון יעדער פונקט B. פון דער צווייטער זײַט, די דיפערענץ צווישן דעם אומגעפערן וואָרצל מיט אן



צייכ. 1.

איבערפלוס און דעם אנטשפּרעכיקן אומגעפערן וואָרצל מיט א מאנגל קען ווערן ווי מע וויל קליין, דעריבער ווערט בא אן אומבאגרענעצטער פאַרגרעסערונג פון דער פינקטלעכקײַט, מיט וועלכער מיר געפינען די אומגעפער־ע קוואדראט־וואָרצלען פון 3, אלץ קלענער און קלענער אפ דער צאָל־אקס דער אָפשטאנד, וואָס טיילט אָפּ דעם געביט פון די פונקטן b פונעם געביט פון די פונקטן B (ד. ה., די

אָפּשטאַנדן: $b_1B_1, b_2B_2, b_3B_3\ldots$), און זי קאָנען ווערן ווי מע וויל קליין. באַ אַזעלכע באַדינגונגען דאַרפן מיר דערלאָזן, אַז אַף דער גראָדער עקזיסטירט עפּעס אַ פּונקט x (און נאָר איינער), וואָס איז דער גרענעץ צווישן דעם טייל פון דער גראָדער, אין וועלכן עס ליגן אַלע פּונקטן b, און יענעם טייל פון דער גראָדער, ווו עס געפינען זיך אַלע פּונקטן B.

מיר וועלן באַצייכענען מיטן בוכשטאַב α די צאָל, וועלכע מעסט אויס דעם אָפּשניט Ax. אַזוי־ווי די דאָזיקע צאָל איז גרעסער פון יעדערער פון די צאָלן, וועלכע מעסטן אויס די אָפּשניטן $Ab_1, Ab_2\ldots$ און קלענער פון יעדערער פון די צאָלן, וועלכע מעסטן אויס די אָפּשניטן $AB_1, AB_2\ldots$, דאַרף α^2 זײַן גרעסער פונעם קוואַדראַט פון יעדער פון די אומגעפּערע קוואַדראַט־וואָרצלען פון 3, גענומענע מיט אַ מאַנגל, און קלענער פונעם קוואַדראַט פון יעדערן פון די אומגעפּערע קוואַדראַט־וואָרצלען פון 3, גענומענע מיט אַן איבערפלוס. לויט דער דעפיניציע פון די אומגעפּערע קוואַדראַט־וואָרצלען, וועט אַזאַ צאָל זײַן 3. הייסט עס $\alpha^2 = 3$, און דעריבער איז $\alpha = \sqrt{3}$.

איבערכאַזערנדיק דאָס אַלץ, וואָס איז איצט געזאָגט געוואָרן וועגן $\sqrt{3}$, וועגן דעם וואָרצל פון אַ באַליביקער מאַדרייגע פון אַ באַליביקער צאָל (פאַרשטענדלעך, אַ פּאָזיטיווער, ווײַל מיר ריידן וועגן אַריפמעטישע וואָרצלען) קאָן מען זאָגן, אַז וואָס פאַר אַ צאָל עס זאָל ניט זײַן A, איז שטענדיק $\sqrt[m]{A}$ אַזאַ צאָל, אַ ראַציאָנעלע אָדער איראַציאָנעלע, וואָס די m־טע מאַדרייגע אירע איז גלײַך צו A.

10. דער זיך פון אַקטן מיט איראַציאָנעלע צאָלן. צוויי איראַציאָנעלע צאָלן ווערן אָנגערופן גלײַכע, ווען עס זײַנען גלײַך זייערע אומגעפּערע באַדײַטונגען, גענומענע מיט אַ באַליביקער, אָבער מיט דער זעלביקער פּינקטלעכקײַט (און דערבײַ ביידע מיט אַ מאַנגל, אָדער ביידע מיט אַן איבערפלוס). פון צוויי ניטגלײַכע איראַציאָנעלע צאָלן איז יענע צאָל גרעסער, וואָס איר אומגעפּערע באַדײַטונג איז גרעסער פון דער אומגעפּערער באַדײַטונג פון דער צווייטער באַ דער זעלביקער פּינקטלעכקײַט.

לאָמיר באַשטימען דעם זיך פון די אַקטן מיט איראַציאָנעלע צאָלן. מיר וועלן נעמען צוויי איראַציאָנעלע צאָלן α און β. זאָלן זייערע אומגעפּערע באַדײַטונגען, גענומענע מיט אַ מאַנגל, זײַן אַזעלכע (מיר נעמען די אומגעפּערע באַדײַטונגען $\sqrt{3}$ און $\sqrt{2}$).

	ביז 0,0001	ביז 0,001	ביז 0,01	ביז 0,1
פאַר דער צאָל α . .	1,7320	1,732	1,73	1,7
פאַר דער צאָל β . .	1,4142	1,414	1,41	1,4

די געהעריקע אומגעפּערע באַדײַטונגענ מיט אנ איבערפלוס באַקומענ זיכ פונ די דאָזיקע צאָלנ דורכ פאַרגרעסערנ דעם לעצטנ געצענטלטנ צייכנ אפ 1.

דאנ: א) צונויפלייגנ α אונ β הייסט געפינענ די צאָל, וועלכע וועט זײַנ

גרעסער פונ יעדערער פונ די סומעס:	קלענער פונ יעדערער פונ די סומעס:
$1{,}7+1{,}4\ .\ .\ .=3{,}1$	$1{,}8+1{,}5\ .\ .\ .=3{,}3$
$1{,}73+1{,}41\ .\ .=3{,}14$	$1{,}74+1{,}42\ .\ .=3{,}16$
$1{,}732+1{,}414\ .\ .=3{,}146$	$1{,}733+1{,}415\ .=3{,}148$
$1{,}7320+1{,}4142=3{,}1462$ א.א.וו.	$1{,}7321+1{,}4143=3{,}1464$

ד. ה. צונויפלייגנ די צאָלנ α אונ β הייסט—געפינענ אזא דריטע צאָל, וואָס זאָל זײַנ גרעסער פונ דער סומע פונ זייערע באַליביקע אומגעפּערע באַדײַטונגענ מיט א מאנגל, אָבער קלענער פונ דער סומע פונ זייערע באַליביקע אומגעפּערע באַדײַטונגענ, גענומענ מיט אנ איבערפלוס.

ב) נעמענדיק די אומגעפּערע באַדײַטונגענ פונ די צאָלנ α אונ β, וואָס זײַנענ דאָ אָנגעוויזנ קענענ מיר זאָגנ, אז דער קייפל־פּראָדוקט $\alpha\beta$ איז א צאָל, וועלכע

איז גרעסער פונ יעטווידער פונ די קייפל־פּראָדוקטנ:	אונ איז קלענער פונ יעטווידער פונ די קייפל־פּראָדוקטנ:
$1{,}7\cdot1{,}4\ .\ .\ .=2{,}38$	$1{,}8\cdot1{,}5\ .\ .\ .=2{,}70$
$1{,}73\cdot1{,}41\ .\ .=2{,}4393$	$1{,}74\cdot1{,}42\ .\ .=2{,}4708$
$1{,}732\cdot1{,}414\ .=2{,}449048$	$1{,}733\cdot1{,}415\ .=2{,}452195$
$1{,}7320\cdot1{,}4142=2{,}44939440$ א.א.וו.	$1{,}7321\cdot1{,}4143=2{,}44970903$

ד. ה. איבערקייפלענ די צאָלנ α אונ β — הייסט געפינענ אזא דריטע צאָל, וועלכע זאָל זײַנ גרעסער פונ דעם קייפל־פּראָדוקט פונ זייערע באַליביקע אומגעפּערע באַדײַטונגענ מיט א מאנגל, אָבער קלענער פונ דעם קייפל־פּראָדוקט פונ זייערע באַליביקע אומגעפּערע באַדײַטונגענ מיט אנ איבערפלוס.

ג) דערהייבנ אנ איראַציאָנעלע צאָל α אינ דער צווייטער, דריטער, פערטער א. א. מאדרייגעס—הייסט געפינענ דעם קייפל־פּראָדוקט, וועלכער איז צוזאמענגעשטעלט פונ צוויי, דרײַ, פיר א. א. וו. מיטקייפלערס, וועלכע זײַנענ גלײַכ צו α.

ד) פאַרקערטע אקטנ ווערנ באַשטימט פאַר איראַציאָנעלע צאָלנ אפנ זעלביקנ אויפנ, ווי פאַר ראַציאָנעלע; צום בײַשפּיל, אראָפּנעמענ פונ דער צאָל α די צאָל β—הייסט געפינענ אזא צאָל x, אז די סומע $x+\beta$ זאָל זײַנ גלײַכ צו α. א. א. וו.

אויב איינע פונ די צאָלנ α אָדער β וועט זײַנ א ראַציאָנעלע, דאנ דאַרפ מענ אינ די אָנגעוויזענע דעפיניציעס פונ די דירעקטע אקטנ אָנשטאָט אומגעפּערע באַדײַטונגענ פונ אזא צאָל נעמענ א פּינקטלעכע צאָל.

דער קייפל־פּראָדוקט פונ אנ איראַציאָנעלער צאָל אפּ א נול ווערט אָנגענומענ, ווי פאר ראַציאָנעלע צאָלנ, גלײַכ צו נול.

אַקטנ איבער נעגאַטיווע איראַציאָנעלע צאָלנ ווערנ דורכגעפירט לויט די קלאָלימ, וועלכע זײַנענ געגעבנ פאר ראַציאָנעלע נעגאַטיווע צאָלנ.

בא א מער אויספירלעכער באַטראַכטונג קענ מענ פעסטשטעלנ, אז אַקטנ איבער איראַציאָנעלע צאָלנ פאַרמאָגנ די זעלבע אייגנשאַפטנ, וועלכע געהערנ צו אַקטנ איבער ראַציאָנעלע צאָלנ. צומ בײַשפּיל, די סומע אונ דער קייפל־פּראָדוקט פאַרמאָגנ די זעלביקע אייגנשאַפטנ פונ איבערשטעלונג אונ קאָמבינירונג. קייפל אונ כילעק פאַרמאָגנ, אויסער דעמ, די אייגנשאַפטנ פונ פאַרטיילונג.

11. ארויסציִענ א וואָרצל פונ רעלאַטיווע צאָלנ. באמ ארויסציִענ א וואָרצל פונ רעלאַטיווע צאָלנ איז וויכטיק צו באַשטימענ דעמ צייכנ פונעמ וואָרצל. דער דאָזיקער צייכנ ווערט באַשטימט אפּנ גרונט פונ די פאָלגנדיקע, אינ ערשטנ טייל געבראַכטע, קלאָלימ:

א) דער וואָרצל פונ אנ אומגראָדער מאַדרייגע פונ א פּאָזיטיווער צאָל איז א פּאָזיטיווע צאָל.

אונ טאַקע:

$$\sqrt[3]{125}=+5;\quad \sqrt[5]{243}=+3;\quad \sqrt[9]{512}=+2;$$

ווײַל:

$$(+5)^3=+125;\quad (+3)^5=+243;\quad (+2)^9=+512.$$

ב) דער וואָרצל פונ אנ אומגראָדער מאַדרייגע פונ א נעגאַטיווער צאָל איז א נעגאַטיווע צאָל.

צומ בײַשפּיל:

$$\sqrt[3]{-125}=-5;\quad \sqrt[5]{-243}=-3;\quad \sqrt[9]{-512}=-2,$$

ווײַל:

$$(-5)^3=-125;\quad (-3)^5=-243;\quad (-2)^9=-512.$$

ג) דער וואָרצל פונ א גראָדער מאַדרייגע פונ א פּאָזיטיווער צאָל האָט צוויי באַדײַטונגענ, גלײַכ לויט זייער אַבסאָליוטער גרייס, אָבער מיט קעגנזעצלעכע צייכנס.

$$\sqrt[4]{16}=+2,$$

ווײַל $(+2)^4=16$

אָבער אויכ $\sqrt[4]{16}=-2,$

ווײַל $(-2)^4=+16.$

$$\sqrt[6]{729}=+3,$$

ווײַל $(+3)^6=729,$

אָבער אויכ $\sqrt[6]{729}=-3.$

ווײַל $(-3)^6=+729,$

געווײנלעכ שרײַבט מענ פאר א וואָרצל פונ א גראָדער מאדרייגע פונ א פּאָזי־ טיווער צאָל ביידע צייכנס צוזאמענ:

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2; \quad \sqrt[6]{729} = \pm 3.$$

ד) <u>דער וואָרצל פונ א גראָדער מאדרייגע פונ א נעגאטיווער צאָל קענ ניט אויסגעדריקט ווערנ ניט דורכ א פּאָזיטיווער, ניט דורכ א נעגאטיווער צאָל.</u>

אונ טאקע, צומ בײַשפּיל, $\sqrt[4]{-16}$ קענ ניט זײַנ גלײַכ צו $+2$, ווײַל $+16 = (2)^4$, אונ ער קענ אויכ ניט זײַנ גלײַכ צו -2, ווײַל $+16 = (-2)^4$.

12. **שיינבארע צאָלנ.** מיר האָבנ איצט געזענ, אז דער וואָרצל פונ א גראָ־ דער מאדרייגע פונ א נעגאטיווער צאָל, קענ ניט אויסגעדריקט ווערנ ניט דורכ א פּאָזיטיווער, ניט דורכ א נעגאטיווער צאָל: אזא וואָרצל הייסט א שיינבארע צאָל (די ראציאָנעלע אונ איראציאָנעלע צאָלנ טראָגנ דעמ אלגעמיינעמ נאָמענ רעאלע צאָלנ).

דאָס ארײַנפירנ אינ אלגעבער שיינבארע צאָלנ איז ארויסגערופנ דורכ מאָטיוונ, ענלעכע צו די, צוליב וועלכע אינ איר זײַנענ דערלאָזנ געוואָרנ נעגאטיווע צאָלנ: סײַ די, סײַ יענע האָבנ דעמ ציל צו פאראלגעמיינערנ געוויסע אלגעבראַישע זאצנ אונ פאָרמולעס. צומ בײַשפּיל, דערלאָזנדיק שיינבארע צאָלנ, קענענ מיר אָננעמענ, אז א קוואדראט־גלײַכקײַט פארמאָגט שטענדיק צוויי וואָרצלענ א.א.וו. א באזונדערס וויכטיקע באדײַטונג פארמאָגנ די שיינבארע צאָלנ אינ דער טעאָריע פונ גלײַכונגענ פונ העכערע מאדרייגעס.

III. אומבילדונג פונ איראציאָנעלע אויסדרוקנ.

13. **ראציאָנעלע אונ איראציאָנעלע אלגעבראַישע אויסדרוקנ.** אנ אל־ געבראַישער אויסדרוק הייסט א ראציאָנעלער אינ באצוג צו וועלכנ עס איז בוכ־ שטאב, וועלכער גייט ארײַנ אינ דעמ דאָזיקנ אויסדרוק, אויב דער בוכשטאב שטייט ניט אונטערנ ראדיקאל־צייכנ; אינ פארקערטנ פאל הייסט דער אויסדרוק איראציאָ־ נעלער אינ באצוג צומ דאָזיקנ בוכשטאב; צומ בײַשפּיל, דער אויסדרוק $3a + 2\sqrt{x}$ איז א ראציאָנעלער אינ באצוג צו a אונ אנ איראציאָנעלער אינ באצוג צו x.

ווענ מע זאָגט—„ראציאָנעלער אלגעבראַישער אויסדרוק", ניט צוגעבנדיק אינ באצוג צו וועלכע בוכשטאבנ, דעמלט ווערט געמיינט, אז ער איז ראציאָנעל אינ באצוג צו אלע בוכשטאבנ, וועלכע גייענ ארײַנ אינעמ אויסדרוק.

14. **גרונט־אייגנשאפט פונ א ראדיקאל.** לאָמיר באמערקנ, אז די וואָרצלענ (ראדיקאלנ), וועגנ וועלכע מיר וועלנ ריידנ אינ דעמ דאָזיקנ קאפּיטל, ווערנ גע־ מיינט נאָר אריפמעטישע. מיר וועלנ נעמענ א וועלכנ עס איז ראדיקאל, צומ בײַשפּיל $\sqrt[3]{a}$, אונ מיר וועלנ דערהייבנ די אונטערראדיקאלע צאָל אינ וועלכער עס איז מאדרייגע, צומ בײַשפּיל, אינ קוואדראט; צוזאמענ מיט דעמ וועלנ מיר קייפלענ דעמ ראדיקאלווײַזער אפ דעמ ווײַזער פונ דער מאדרייגע, אינ וועלכער

מיר האָבנ דערהייבנ די אונטעראדיקאלע צאָל, ד. ה., אינ אונדזער פאל וועלנ מיר קייפלענ אפ 2. מיר וועלנ דאנ באקומענ א נײַעם ראדיקאל: $\sqrt[6]{a^2}$. לאָמיר באווײַזנ, אַז פונ די צוויי אַקטנ האָט זיכ די גרייס פונעם ראדיקאל ניט געענדערט.

לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ, אַז מיר האָבנ אויסגערעכנט $\sqrt[3]{a}$ אונ האָבנ באקומענ א וועלכע עס איז צאָל x. דאנ קענענ מיר אָנשרײַבנ די גלײַכקײַטנ:

$$x=\sqrt[3]{a} \text{ אונ } x^3=a.$$

מיר וועלנ דערהייבנ ביידע טיילנ פונ דער לעצטער גלײַכקײַט אינ קוואדראט:

$$(x^3)^2=a^2, \text{ ד. ה. } x^6=a^2.$$

פונ דער לעצטער גלײַכקײַט איז קלאָר, אַז $x=\sqrt[6]{a^2}$. אַזוי אַרום איז די זעלביקע צאָל x גלײַכ סײַ צו $\sqrt[3]{a}$, סײַ צו $\sqrt[6]{a^2}$; הייסט עס:

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}.$$

אפ דעם זעלביקנ אופנ קענ מענ זיכ איבערצײַגנ, אַז:

$$\sqrt{a}=\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[8]{a^4}=\ldots$$
$$\sqrt[3]{m^2}=\sqrt[6]{m^4}=\sqrt[9]{m^6}=\sqrt[12]{m^8}=\ldots$$
$$\sqrt{1+x}=\sqrt[4]{(1+x)^2}=\sqrt[6]{(1+x)^3}=\ldots$$

די גרייס פונעם ראדיקאל וועט זיכ ניט ענדערנ, ווענ מיר וועלנ דעם אונטער־ראדיקאלנ אויסדרוק דערהייבנ אינ א וועלכער עס איז מאדרייגע אונ צוזאמענ מיט דעם קייפלענ דעם ראדיקאל־ווײַזער אפ דעם ווײַזער פונ דער מאדרייגע, אינ וועל־כער מיר האָבנ דערהייבנ דעם אונטעראדיקאלנ אויסדרוק.

אָט דעם קלאל דריקט מענ צײַטנווײַז אויס אַזוי:

די גרייס פונעם ראדיקאל וועט זיכ ניט ענדערנ, ווענ מע וועט דעם ראדיקאל־ווײַזער אונ דעם ווײַזער פונ דעם אונטעראדיקאלנ אויסדרוק קייפלענ (אָדער צעטיילנ) אפ דער זעלביקער צאָל.

אויספירנ: א) ראדיקאלנ פונ פארשיידענע מאדרײַגעס קענ מענ ברענגענ צו די זעלביקע ווײַזערס (אפנ זעלביקנ אופנ ווי ברוכצאָלנ מיט פארשיידענע ווײַזערס קענ מענ ברענגענ צו איינ אלגעמיינעמ ווײַזער). צוליב דעם איז גענוג צו געפינענ די אלגעמיינע טיילבארע (בעסער פונ אלצ די קלענסטע) פונ די ווײַזערס פונ אלע ראדיקאלנ אונ קייפלענ דעם ווײַזער פונ יעדערנ פונ זיי אפ דעם געהעריקנ צוגאָב־קייפלער, דערהייבנדיק, צוזאמענ מיט דעם יעדער אונטעראדיקאלנ אויסדרוק אינ דער געהעריקער מאדרייגע.

בײַשפּיל:

$$\sqrt{ax};\ \sqrt[3]{a^2};\ \sqrt[6]{x}.$$

די קלענסטע טײלבארע פונ די ראדיקאל־ווײַזערס איז 6; די צוגאָב־קײפלערס װעלנ זײַנ: פארנ ערשטנ ראדיקאל 3, פארנ צווייטנ 2 אונ פארנ דריטנ 1.

דעמלט:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{a^3x^3};\ \ \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{(a^2)^2}=\sqrt[6]{a^4};\ \ \sqrt[6]{x}.$$

ב) ווענ דער אונטעראדיקאלער אויסדרוק איז א מאדרייגע, וואָס איר ווײַזער האָט א געמײנזאמענ קײפלער מיטנ ראדיקאל־ווײַזער, קענ מענ אפ דעמ דאָזיקנ קײפלער צעטײלנ בײדע ווײַזערס.

בײַשפּילנ:

$$1)\ \sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x};\ \ 2)\ \sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}.$$

ג) אויב דער אונטערראדיקאלער אויסדרוק איז א קײפל־פּראָדוקט פונ עטלעכע מאדרייגעס, וואָס זײערע ווײַזערס האָבנ דעמ זעלביקנ געמײנזאמענ קײפלער מיטנ ראדיקאל־ווײַזער, דעמלט קענ מענ אפ דעמ דאָזיקנ קײפלער צעטײלנ אלע ווײַזערס.

בײַשפּיל:

$$\sqrt[6]{8a^6x^3}=\sqrt[6]{(2a^2x)^3}=\sqrt{2a^2x}.$$

15. ארויסציִענ א וואָרצל פונ א קײפל־פּראָדוקט, פונ א מאדרייגע אונ פונ א ברוכצאָל.

א) זאָל זײַנ נייטיק ארויסציִענ א וואָרצל פונ n־ער מאדרייגע פונ דעמ קײפל־פּראָדוקט abc. ווענ עס וואָלט זיכ געפאָדערט דערהייבנ דעמ קײפל־פּראָדוקט אינ א מאדרייגע, איז, ווי מיר האָבנ געזענ, וואָלט מענ באדארפט דערהייבנ אינ א מאדרייגע יעדער מיטקײפלער באזונדער. אזוי־ווי ארויסציִענ א וואָרצל איז א קעגנזעצלעכער אקט צו דערהייבנ אינ א מאדרייגע, קענ מענ זיכ פאָרשטעלנ, אז אויכ באַמ ארויסציִענ א וואָרצל פונ א קײפל־פּראָדוקט דארפ מענ אימ ארויסציִענ פונ יעדער מיטקײפלער באזונדער. ד. ה., אז:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

קעדײ איבערצײַגנ זיכ אינ דער ריכטיקײַט פונ דער דאָזיקער גלײַכקײַט, וועלנ מיר דערהייבנ דעמ רעכטנ טײל אירנ אינ דער מאדרייגע n (לויט דער טעאָרעמע: קעדײ דערהייבנ א קײפל־פּראָדוקט אינ מאדרייגע...):

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

אָבער לויט דער דעפיניציע פונ א וואָרצל,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;\ \left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b;\ \left(\sqrt[n]{c}\right)^n=c.$$

הייסט עס:

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=abc.$$

אויב די n־ע מאדרייגע פונעם קייפל־פּראָדוקט $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ איז גלײַך צו abc, דעמלט הייסט עס, אז דער דאָזיקער קייפל־פּראָדוקט איז גלײַך צום וואָרצל פון n־ער מאדרייגע פון abc. הייסט עס, קעדיי ארויסצוציִען א וואָרצל פון א קייפל־פּראָדוקט, דארף מען אים ארויסציִען פון יעדער מיטקייפלער באזונדער און די רעזולטאטן איבערקייפלען.

ב) עס איז לײַכט דורך א קאָנטראָל צו איבערצײַגן זיך, אז די פאָלגנדיקע גלײַכקײַטן זײַנען ריכטיק:

$$\sqrt{a^4}=a^2, \quad \text{ווײַל} \quad (a^2)^2=a^4;$$
$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4, \quad \text{"} \quad (x^4)^3=x^{12} \quad \text{א. א. וו.}$$

אין אַלגעמיין, $\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$, ווײַל $(a^m)^n=a^{mn}$. הייסט עס, קעדיי ארויסציִען א וואָרצל פון א מאדרייגע, וואָס איר ווײַזער טיילט זיך אפּן ווײַזער פונעם ראדיקאַל, דארף מען צעטיילן דעם מאדרייגע־ווײַזער אפּן ראדיקאַל־ווײַזער.

ג) עס וועלן אויך זײַן ריכטיק פאָלגנדיקע גלײַכקײַטן:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}, \quad \text{ווײַל} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16};$$
$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}, \quad \text{"} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27} \quad \text{א. א. וו.}$$

אין אַלגעמיין,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

ווײַל

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

קעדיי ארויסציִען א וואָרצל פון א ברוכצאָל, דארף מען אים ארויסציִען פונעם ציילער און ווײַזער באזונדער און דעם ערשטן רעזולטאט צעטיילן אפּן צווייטן.

ב ײַ ש פּ י ל ן:

1) $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{b^6}=3a^2b^3;$

2) $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3;$

3) $\sqrt{\frac{4a^2b^6}{9c^2d^4}}=\frac{2ab^3}{3cd^2}.$

אָנמערקונגען. 1. אין די אָנגעוויזענע קלאַלים שטעלט מען זיך פאָר, אז עס רעדט זיך אַלץ וועגן וואָרצלען א ר י פ מ ע ט י ש ע.

2. אויב דער וואָרצל איז פון א ג ר אָ ד ע ר מאדרייגע און, ווי מע שטעלט זיך אים פאָר, אן א ל ג ע ב ר א ִ י ש ע ר, דעמלט דארף מען פאר דעם געפונענעם רעזולטאט שטעלן א צווייענדיקן צייכן $\pm$. אזוי:

$$\sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

16. אײנפֿאַכסטע אומבילדונגען פֿון ראַדיקאַלן. א) אַרויסטראָגן קײפֿלערס אױסערן ראַדיקאַל־צײכן. אויב דער אונטעראַדיקאַלער אויס־דרוק לײגט זיך פֿאַנאַנדער אַף אַזעלכע קײפֿלערס, וואָס פֿון אײניקע פֿון זײ קען מען אַרויסציִען אַ וואָרצל, דאַן קען מען אַזעלכע קײפֿלערס, נאָכן אַרויסציִען פֿון זײ דעם וואָרצל, פֿאַרשרײַבן פֿאַרן ראַדיקאַל־צײכן (זײ קענען אַרויסגעטראָגן ווערן אױסערן ראַדיקאַל־צײכן), צום בײַשפּיל:

$$1)\ \sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a};$$

$$2)\ \sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8\cdot 2x^3x}=2x\sqrt[3]{2x}.$$

ב) אַרונטערטראָגן קײפֿלערס אונטערן ראַדיקאַל־צײכן. אָפּט טרעפֿט, אַז ס'איז, פֿאַרקערט, נוציק אַרונטערטראָגן אונטערן ראַדיקאַל קײפֿלערס, וועלכע שטײען פֿאַר אים; צוליב דעם איז גענוג צו דערהײבן אַזעלכע קײפֿלערס אין אַ מאַדרײגע, וואָס דער ווײַזער אירער איז גלײַך צום ווײַזער פֿון דעם ראַדיקאַל, און נאָכדעם פֿאַרשרײַבן זײ ווי קײפֿלערס אונטערן ראַדיקאַל־צײכן. צום בײַשפּיל:

$$1)\ a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5};$$

$$2)\ 2x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(2x)^3x}=\sqrt[3]{8x^3x}=\sqrt[3]{8x^4}.$$

ג) באַפֿרײַען דעם אונטעראַדיקאַלן אױסדרוק פֿון דײַטערס. מיר וועלן עס אילוסטרירן אַף פֿאָלגנדיקע בײַשפּילן:

1) $\sqrt{\frac{3x}{5}}$. לאָמיר אומבילדן די ברוכצאָל אַזוי, אַז פֿונעם דײַטער זאָל מען קענען אַרויסציִען אַ קוואַדראַט־וואָרצל. צוליב דעם וועלן מיר קײפֿלען בײדע גלידער פֿון דער ברוכצאָל אַף 5:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}}=\sqrt{\frac{3x\cdot 5}{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{15x}.$$

2) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. מיר וועלן קײפֿלען בײדע גלידער פֿון דער ברוכצאָל אַף 2, אַף a און אַף x, ד. ה. אַף $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2ax}{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2}=\frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

באַמערקונג. ווען עס פֿאָדערט זיך אַרויסציִען אַ וואָרצל פֿון אַן אַלגעבראַיִשער סומע, וואָלט געווען אַ טאָעס אַרויסצוציִען אים פֿון יעדער כיבערצאָל באַזונדער. צום בײַשפּיל: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, אינדערצײַט וואָס $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ הײסט עס, אַז דער אַקט פֿון אַרויסציִען אַ וואָרצל פֿאַרמאָגט ניט אין באַצוג צו כיבער (און כיסער) קײן פֿאַרטײלונג־אײגנשאַפֿט (דאָסגלײַכן דערהײבונג אין אַ מאַדרײגע).

געניטונגענ:

טראָגט ארויס די מיטקייפלערס אויסערנ ראדיקאל־צייכנ:

11. $\sqrt{4a^3}$; $\sqrt{8a^6b^7}$; $\sqrt{50a^5b^3x^3}$; $\sqrt[3]{16a^4}$.

12. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{1728}$.

13. $\sqrt{-81x^5y^2}$; $\sqrt{98(a+b)^3}$; $\sqrt[3]{250x^7y}$.

טראָגט אונטער די קייפלערס, וועלכע שטייענ פארנ ראדיקאל, אונטערנ צייכנ פונ דעמ זעלביקנ ראדיקאל:

14. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $5\sqrt{5}$; $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$

15. $2ab\sqrt{\frac{1}{2}a}$; $\frac{1}{2}\sqrt{4x}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

16. $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$; $(a+b)\sqrt{a+b}$; $2(x-y)\sqrt{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

באפרײַט דעמ אונטערראדיקאלנ אויסדרוק פונ די דײַטערס:

17. $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$. 18. $\sqrt[3]{\frac{3x}{49ay^2}}$; $\sqrt{x-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3ax}}$.

17. ענלעכע ראדיקאלנ. ענלעכע ראדיקאלנ ווערנ אָנגערופנ אזעלכע, אינ וועלכע עס זײַנענ אידענטיש די אונטערראדיקאלע אויסדרוקנ אונ עס זײַנענ אידענטיש די ראדיקאל־ווײַזערס. אזעלכע זײַנענ, צומ בײַשפּיל, די ראדיקאלנ:

$$+3a\sqrt[3]{xy} \text{ אונ } -5b\sqrt[3]{xy}.$$

קעדיי צו באשטימענ, צי זײַנענ צווישנ זיכ ענלעכ די געגעבענע ראדיקאלנ, מוז מענ פריִער פאר אַלצ זיי פארייִנפאכנ, ד. ה., אויב עס איז מעגלעכ:

1) ארויסטראָגנ אויסערנ ראדיקאל־צייכנ די קייפלערס, פונ וועלכע מע קענ ארויסציִענ א וואָרצל;

2) אונטער די ראדיקאלנ באפרײַענ זיכ פונ דײַטערס;

3) פארקלענערנ די מאדרייגע פונעמ ראדיקאל, פארקירצנדיק די ווײַזערס פונעמ ראדיקאל אונ פונ דער אונטערראדיקאלער צאָל אפ זייער געמיינזאמענ קייפלער, אויב אזעלכער איז פאראנ.

נאָכנ אויספירנ די דאָזיקע אקטנ וועט דער ראדיקאל דערפירט ווערנ צו א נאָרמאלנ אויסזענ.

בײַשפּילנ:

1) די ראדיקאלנ $\sqrt[3]{8ax^3}$ אונ $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ וועלנ ווערנ ענלעכע, ווענ מיר וועלנ זיי פארייִנפאכנ:

$$\sqrt[3]{8ax^3}=2x\sqrt[3]{a};\quad \sqrt[6]{64a^2y^{12}}=2y^2\sqrt[6]{a^2}=2y^2\sqrt[3]{a}.$$

2) די דרײַ ראַדיקאַלן $\sqrt{6x}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$, $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, װעלן װערן ענלעך, אויב מיר װעלן אונטער די ראַדיקאַלן באַפרײַען זיך פֿון די דײַטערס:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x\cdot 3}{3\cdot 3}}=\sqrt{\frac{6x}{3^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x};$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

גענישונגען.

ברענגט צו די זעלביקע װײַזערס די פֿאָלגנדיקע ראַדיקאַלן:

19. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{x^3}$; $\sqrt[6]{y^5}$.

20. $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt[4]{xz^3}$; $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}$.

פֿאַרײנפֿאַכט די פֿאָלגנדיקע ראַדיקאַלן (פֿאַרקירצנדיק די װײַזערס פֿון דעם ראַדיקאַל און פֿון דעם אונטערראַדיקאַלן אויסדרוק):

21. $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{10000}$, $\sqrt[6]{9a^4b^8}$, $\sqrt[8]{16a^8b^{12}}$.

22. $\sqrt[9]{8x^6}$; $\sqrt[6]{121a^4b^4}$; $\sqrt[15]{8a^3b^{12}c^{30}}$.

פֿאַרײנפֿאַכט פֿאָלגנדיקע ראַדיקאַלן מיטן ציל צו אַנטדעקן זײער ענלעכקײט:

23. $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$; $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16\frac{1}{3}}$.

24. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$; $\sqrt{ax}$.

25. $\sqrt{\frac{bx^2}{a}}$; $\sqrt{\frac{bx^4}{a}}$; $\sqrt{\frac{x^2}{ab}}$.

18. אַקטן איבער איראַציאָנעלע אײנגלידער. א) כּיבער און כּיסער.

קעדײַ צו צונויפֿלײגן אָדער אַראָפּנעמען איראַציאָנעלע אײנגלידער, פֿאַרבינדט מען זײ מיט די צײכנס פּליוס אָדער מינוס און מע גיסט צונויף די ענלעכע גלידער, אויב אַזעלכע זײַנען פֿאַראַן.

בײַשפּילן:

1) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=$

$=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}.$

ב) קייפל. מיר האָבנ געזענ (§ 18), אז קעדיי ארויסציִענ א וואָרצל פונ א קייפל־פּראָדוקט, דארפ מענ אימ ארויסציִענ פונ יעדער מיטקייפלער באזונדער; הייסט עס, פארקערט:

קעדיי איבערצוקייפלענ עטלעכע ראדיקאלנ פונ גלײַכע מאדרייגעס, דארפ מענ איבערקייפלענ די אונטערראדיקאלע אויסדרוקנ אונ פונעמ קייפל־פּראָדוקט ארויסציִענ דעמ וואָרצל פונ דער זעלבער מאדרייגע. אזוי:

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc};\quad \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{xy}.$$

אויב עס זײַנענ געגעבנ צומ איבערקייפלענ ראדיקאלנ מיט פארשיידענע ווײַזערס, דארפ מענ זיי אפריִער ברענגענ צו איינ ווײַזער.

אויב פאר די ראדיקאלנ געפינענ זיך קאָעפיציִענטנ, דארפ מענ זיי איבערקייפלענ.

בײַשפּילנ:

$$1)\ a\sqrt{2x}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{3x}=\frac{a^2}{b}\sqrt{6x^2}=\frac{a^2x}{b}\sqrt{6};$$

$$2)\ \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[6]{3^3\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2\cdot2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{8}}.$$

ג) בילעך. מיר ווייסנ, אז קעדיי ארויסציִענ א וואָרצל פונ א ברוכצאָל, דארפ מענ אימ ארויסציִענ פונעמ ציילער אונ ווײַזער באזונדער; הייסט עס, אז פארקערט:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

א. א. וו., ד. ה.

קעדיי צו צעטיילנ ראדיקאלנ מיט גלײַכע ווײַזערס, דארפ מענ צעטיילנ זייערע אונטערראדיקאלע אויסדרוקנ אונ פונעמ טיילוועָרט ארויסציִענ דעמ וואָרצל פונ דער זעלבער מאדרייגע.

ראדיקאלנ מיט פארשיידענע ווײַזערס דארפ מענ אפריִער ברענגענ צו א גלײַכנ ווײַזער.

אויב עס זײַנענ פאראנ קאָעפיציִענטנ, צעטיילט מענ זיי.

בײַשפּילנ:

$$1)\ -6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\cdot5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b};$$

$$2)\ \frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{a(a-x)}{8}}.$$

ד) **דערהייבנ אינ א מאדרייגע.** קעדיי צו דערהייבנ א ראדיקאל אינ א מאדרייגע, דארפ מענ אינ דער זעלביקער מאדרייגע דערהייבנ דעמ אונטעראדיקאלנ אויס־דרוק, איבערלאָזנדיק דעמ זעלבנ ראדיקאל, אזוי:

$$(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2};\quad (\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\ldots=\sqrt[n]{x^m}.$$

ביישפילנ:

$$1)\quad (\sqrt[4]{2ab^3x^2})^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}=b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2};$$

$$2)\quad \left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$$

ה) **ארויסציִענ א וואָרצל.** קעדיי ארויסצוציִענ א וואָרצל פונ א וואָרצל, דארפ מענ איבערקייפלענ די ראדיקאל־ווייזערס. אזוי:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}.$$

קעדיי איבערצייגנ זיכ אינ דעמ, וועלנ מיר רעכענענ, אז

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}}=x.$$

מיר וועלנ דערהייבנ ביידע טיילנ פונ דער דאָזיקער גלייכקייט צוערשט אינ קוואדראט, נאָכדעמ אינ קוב:

$$\sqrt[3]{a}=x^2;\quad a=(x^2)^3=x^6.$$

פונדאנענ איז צו זענ, אז $x=\sqrt[6]{a}$, הייסט עס, $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$.

ביישפיל:

$$\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}.$$

מיר וועלנ אונטערפירנ דעמ מיטקייפלער $2x$ אונטערנ ראדיקאל־צייכנ פונ דער דריטער מאדרייגע:

$$\sqrt{\sqrt[3]{(2x)^3x^2}}=\sqrt[6]{8x^5}.$$

לאָמיר באמערקנ, אז אינ דעמ דאָזיקנ ביישפיל (אונ אינ אנדערע צו אימ ענלעכע) קאָנ מענ טאָנ אנדערש: באמערקנדיק, אז דער אויסדרוק, וועלכער שטייט אונטערנ צייכנ פונ קוואדראט־ראדיקאל, איז דער קייפל־פראָדוקט, קאָנענ מיר אָנווענדנ די טעאָרעמע וועגנ ארויסציִענ א וואָרצל פונ קייפל־פראָדוקט.

דעמלט וועלנ מיר באקומענ:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\,\sqrt[6]{x^2}=\sqrt{2}\,\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}.$$

ברענגענדיק איצט די ראדיקאלן צום זעלביקן ווײַזער 6, געפינען מיר:

$$\sqrt[6]{2^3}\quad\sqrt[6]{x^3}\quad\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{8x^5}.$$

געניטונגען:

26. $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}.$

26. $\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{75}+9\sqrt{48}.$

27. $\frac{2}{3}\sqrt{18a^5b^3}+\frac{1}{5}\sqrt{50a^3b^3}-b\sqrt{\frac{2a}{b}}.$

28. $\sqrt{18}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8};\quad 6\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}.$

29. $\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}.$

30. $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}.$

31. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}-\sqrt{27}.$

32. $2\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15};\quad \sqrt[3]{a}\cdot 2\sqrt[3]{a^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^4}.$

33. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a};\quad \sqrt[6]{15}\cdot\sqrt[3]{2};\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}.$

34. $2\cdot\sqrt{\frac{3a}{x^2}}\cdot 4\sqrt{\frac{4x^4}{3a^3}}.$

35. $\sqrt{120a^3b}:\sqrt{3ab};\quad 18\sqrt{27a^3}:3\sqrt{30a}.$

36. $\sqrt{x}:\sqrt[3]{x};\quad \sqrt{8}:\sqrt[3]{2};\quad \sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}.$

37. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3;\quad \left(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2x}\right)^2;\quad (3a^2x\sqrt[3]{a+b})^2.$

38. $(\sqrt[4]{(1+x^3)^2};\quad (\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x})^{10};\quad (3ab^2\sqrt[3]{a^2b})^4.$

39. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}};\quad \sqrt{a\sqrt{a}};\quad \sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}};\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};$

$$\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}};\quad \sqrt[3]{2a\sqrt{\frac{1}{4}a}}.$$

19. אקטן איבער איראציאָנעלע פּילגלידער ווערן דורכגעפירט לויט די זעלבע קלאַלים, וועלכע זײַנען געווען אויסגעפירט פאר ראציאָנעלע פּיל־גלידער. צום בײַשפּיל:

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0{,}3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1{,}5}+7{,}5=8{,}3-4\sqrt{1{,}5}.$$

געניטונגען:

40. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2;\quad (\sqrt[3]{a}+2)\ (\sqrt[3]{a}-2).$

41. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\ (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}).$

42. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\ (2\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$

43. פאַרייִנפאַכט דעם פאָלגנדיקן אויסדרוק:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

איבערצייַגט זיך, אַז די פאָלגנדיקע גלייַכונגען ווערן באַפרידיקט בײַ די געגעבענע באַדײַטונגען פון x:

44. $x^2-4x+1=0$ בײַ $x=2+\sqrt{3}$

45. $x^2-10x+13=0$ בײַ $x=5-2\sqrt{3}.$

20. באַפרײַען דעם ברוכצאָל-דײַטער פון ראַדיקאַלן.

באַם אויסרעכענען ברוכצאָליקע אויסדרוקן, וואָס די דײַטערס זייערע אַנטהאַלטן ראַדיקאַלן, איז אָפט נוציק אַפריִער אומצובילדן די ברוכצאָל אַזוי, אַז איר דײַטער זאָל ניט אַנטהאַלטן קיין ראַדיקאַלן. זאָל, צום בײַשפּיל, נייטיק זײַן אויסצורעכענען:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

מיר קענען מאַכן די אויסרעכענונג אָדער דירעקט לויט דער דאָזיקער פאָרמולע, אָדער מאַכן לעכאַטכילע איר דײַטער פּאַר א ראַציִאָנעלן, צוליב וואָס עס איז גענוג צו קייפלען ביידע גלידער פון דער געגעבענער ברוכצאָל אַף דער סומע $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

די פאָרמולע (2) איז באַקוועמער אַף אויסרעכענען, איידער די פאָרמולע (1) ערשטנס, דערמיט, וואָס זי אַנטהאַלט אינגאַנצן דרײַ אַקטן, און ניט פיר, ווי די פאָרמולע (1), און צווייטנס, אויך דערמיט, וואָס בײַ דער אויסרעכענונג, וועלכע קען דאָך זײַן נאָר אַן אומגעפּערע, ווערט דער טאָעס אינעם רעזולטאַט איינפאַכער באַשטימט לויט דער פאָרמולע (2). אַזוי, געפינענדיק $\sqrt{3}$ און $\sqrt{2}$ מיט א פּינקטלעכקײַט ביז א האַלבן טויזנטכײַלעך, וועלן מיר באַקומען:

$$x=1{,}732+1{,}414=3{,}146.$$

דער דאָזיקער רעזולטאַט איז פּינקטלעך ביז $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ טויזנטכײַלעך, ד. ה. ביז $\frac{1}{1000}$.

מיר וועלן ברענגען עטלעכע פּאָשעטסטע בײַשפּילן פון באַפרײַען דײַטערס פון קוואַדראַט־ראַדיקאַלן.

1) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. לאָמיר קייפלען ביידע גלידער פון דער ברוכצאָל אַף $\sqrt{5}$:

$$\frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=0{,}3\sqrt{5}.$$

2) אויב אונטערנ ראדיקאל־צייכנ שטייט א גאנצע צוזאמענגעשטעלטע צאָל, איז אָפּט נוצלעכ צו פאנאנדערלייגנ זי אפ איינפאכע מיטקייפלער מיטנ ציל צו באשטימענ, וועלכע קייפלערס פעלנ אינ איר, אונ לאָזנ ניט דעריבער, זי זאָל זײַנ א פולער קוואדראט. דעמלט איז גענוג צו קייפלענ ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפנ קוואדראט־וואָרצל פונעם קייפל־פּראָדוקט נאָר פונ די פעלנדיקע מיטקייפלערס. צום בײַשפּיל:

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{2\cdot2\cdot2\cdot5}}=\frac{3\sqrt{2\cdot5}}{\sqrt{2^3\cdot5}\cdot\sqrt{2\cdot5}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2^4\cdot5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2^2\cdot5}=\frac{3}{20}\sqrt{10}.$$

3) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$. מיר וועלנ קייפלענ ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפ $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

אינ אלגעמיינ:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}.$$

4) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$. מיר וועלנ קייפלענ ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפ דער דיפערענצ $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

אינ אלגעמיינ,

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

5) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$. מיר וועלנ קייפלענ ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפ דער סומע $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{3^2-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

אינ אלגעמיינ,

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

6) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. מיר וועלנ קייפלענ ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3-2}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

אינ אלגעמיינ,

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

7) $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2}=$$
$$=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$$

אינ אלגעמיינ

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

8) אויב דער דײַטער איז א צווייגליד מיט וואָרצלענ פונ דער דריטער מאד־ריגע, קענ מענ אימ מאכנ פאר א ראציאָנעלנ, שטיצנדיק זיכ אפ די אידענטישקײַטנ:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3;$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

זאָל, צומ בײַשפּיל, דער ווײַזער זײַנ $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. קייפּלענדיק דעמ צײַלער אונ דעמ דײַטער פונ דער ברוכצאָל אפ דעמ דרײַגליד $(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$, וועלנ מיר באקומענ אינעמ דײַטער $(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3$, ד. ה. $3-2$, אָדער 1. ענלעכ צו דעמ וועלנ מיר געפינענ:

$$\frac{5}{3+\sqrt[3]{4}}=\frac{5[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}{(3+\sqrt[3]{4})[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{3^3+(\sqrt[3]{4})^3}=$$
$$=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{31}.$$

געניטונגענ:

46. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{5}{\sqrt{5}}$; $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

47. $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; $\frac{13}{7-\sqrt{6}}$.

48. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

49. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$.

50. $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

51. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+5}$; $\frac{10}{7-\sqrt[3]{3}}$; $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}$.

IV. איראציאָנעלע גלײַכונגענ.

21. **אופגאבע.** דער פערימעטער פונ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק איז גלײַכ צו 10 מ, אונ איינער פונ זײַנע קאטעטנ איז די גרייס 2 מ; געפינט די איבעריקע 2 זײַטנ פונ דעמ דרײַעק.

באצייכענענדיק דעמ צווייטנ קאטעט מיטנ בוכשטאב x, געפינענ מיר, אז די היפּאָטענוזע איז גלײַכ צו $\sqrt{2^2+x^2}$, אונ, פאָלגלעכ, וועלנ מיר האָבנ א גלײַכונג:

$$2+x+\sqrt{4+x^2}=10.$$

מיר האָבן באַקומען אַ גלײַכונג, אין װעלכער אונטערן צייכן פֿונעם ראַדיקאַל גייט אַרײַן אַן אומבאַװוּסטע. גלײַכונגען פֿון אַזאַ אַרט הייסן **איראַציאָנעלע**.

קעדיי צו לייזן אַן איראַציאָנעלע גלײַכונג, דאַרף מען זי צוערשט **באַפֿרײַען** פֿון די ראַדיקאַלן, אונטער װעלכע עס שטייען די אומבאַװוּסטע. אויב אין דער גלײַכונג, װי אין אונדזער אויפֿגאַבע, גייט אַרײַן נאָר איין ראַדיקאַל, קען מען זיך פֿון אים באַפֿרײַען אַף אַזאַ אופֿן: צוערשט לאָמיר איזאָלירן דעם ראַדיקאַל, ד. ה., איבערטראָגן אַלע גלידער, װעלכע אַנטהאַלטן ניט קיין ראַדיקאַלן, אין איין טייל פֿון דער גלײַכונג, איבערלאָזנדיק דעם ראַדיקאַל אין דעם צווייטן טייל. דעמלט װעט אונדזער גלײַכונג זײַן:

$$\sqrt{4+x^2}=10-2-x=8-x.$$

איצט װעלן מיר דערהייבן ביידע טיילן פֿון דער גלײַכונג אין קוואַדראַט. קלאָר, אַז, דערהייבנדיק גלײַכע צאָלן אין דער זעלביקער מאַדרייגע, װעלן מיר באַקומען גלײַכע צאָלן; דעריבער װעט נאָכן דערהייבן אין קוואַדראַט דער צייכן = פֿאַרבלײַבן:

$$4+x^2=(8-x)^2;\ 4+x^2=64-16x+x^2.$$

לייזנדיק די דאָזיקע גלײַכונג, געפֿינען מיר:

$$16x=64-4=60;\ x=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$$

דאַן װעט די היפּאָטענוזע זײַן:

$$\sqrt{4+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{64+225}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{289}=\frac{1}{4}\cdot 17=4\frac{1}{4}.$$

זאָל זיך נאָך פֿאָדערן לייזן די גלײַכונג:

$$10-\sqrt[3]{3x+21}=7.$$

מיר װעלן איזאָלירן דעם ראַדיקאַל און דערהייבן אים אין קוב:

$$3=\sqrt[3]{3x+21};\quad 27=3x+21;\quad x=2.$$

קאָנטראָל:

$$10-\sqrt[3]{3\cdot 2+21}=10-\sqrt[3]{27}=10-3=7.$$

22. **זײַטיקע לייזונגען.** באַם דערהייבן טיילן פֿון אַ גלײַכונג אין קוואַדראַט קענען אַרײַנגעפֿירט װערן אַזויגערופֿענע „זײַטיקע” לייזונגען, ד. ה. אַזעלכע, װעלכע באַפֿרידיקן ניט די געגעבענע גלײַכונג. מיר װעלן ברענגען צו דעם אַ בײַשפּיל און צוזאַמען דערמיט דערקלערן, פֿאַרוואָס איז עס מעגלעך. לאָמיר, צום בײַשפּיל, האָבן צוויי גלײַכונגען:

$$x+1=\sqrt{x+7}; \qquad (1)$$

$$x+1=-\sqrt{x+7}, \qquad (2)$$

וועלכע שיידן זיך אונטער איינע פֿון דער צווייטער בלויז מיטן צייכן פֿארן ראדיקאַל. דערהייבנדיק אין קוואדראט ביידע טיילן פֿון יעדער גלײַכונג, באַקומען מיר די זעלביקע גלײַכונג:

$$x^2+2x+1=x+7 \qquad (3)$$

ווײַל $(\sqrt{x+7})^2$ און $(-\sqrt{x+7})^2$ זײַנען גלײַך צו דער זעלביקער צאָל $x+7$.

הייסט עס, די גלײַכונג (3) איז גלײַכבאַטרעפֿיק מיט די גלײַכונגען (1) און (2) גענומענע צוזאַמען. דעריבער קען טרעפֿן, אַז אייניקע לייזונגען פֿון דער גלײַכונג (3) באַפֿרידיקן די גלײַכונג (1), און אַנדערע באַפֿרידיקן די גלײַכונג (2). ווירקלעך, די גלײַכונג (3) האָט 2 וואָרצלען: -3 און 2. די צאָל -3 באַפֿרידיקט די גלײַכונג (2), אָבער זי באַפֿרידיקט ניט די גלײַכונג (1); פֿאַרקערט, די צאָל 2 טויג פֿאַר דער גלײַכונג (1), אָבער זי טויג ניט פֿאַר דער גלײַכונג (2).

עס קען זיך אַרויסווײַזן, אַז די גלײַכונג (1) האָט אינגאַנצן ניט קיין לייזונג; דאַן אַנטהאַלט די גלײַכונג (3) לייזונגען בלויז פֿאַר דער גלײַכונג (2) און, הייסט עס, זיי אַלע וועלן זײַן זײַטיקע פֿאַר דער גלײַכונג (1).

אַף אַזאַ אופֿן קען דאָס דערהייבן טיילן פֿון אַ גלײַכונג אין קוואדראט ברענגען צו אַ נײַער גלײַכונג, וואָס איז ניט גלײַכבאַטרעפֿיק מיט דער, וועלכע איז דערהייבן געוואָרן.

23. באַפֿרײַען אַ גלײַכונג פֿון צוויי קוואדראַט־ראַדיקאַלן. זאָל זײַן נייטיק צו לייזן אַ גלײַכונג מיט צוויי קוואדראַט־ראַדיקאַלן, וואָס זייערע אונטער־ראַדיקאַלע אויסדרוקן אַנטהאַלטן אַן אומבאַוואוסטע:

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$$

וועלנדיק צוערשט באַפֿרײַען זיך פֿונעם ראַדיקאַל $\sqrt{2x-4}$, וועלן מיר אים איזאָלירן:

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

איצט וועלן מיר דערהייבן די דאָזיקע גלײַכונג אין קוואדראַט:

$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5=6+2\sqrt{x+5}+x;$$

דאָס וועט געבן:

$$x-10=2\sqrt{x+5}.$$

צום סאָף, וועלן מיר באַפֿרײַען אויך די לעצטע גלײַכונג פֿונעם ראַדיקאַל דורך אַ צווייטן מאָל אויפֿהייבן אין קוואדראַט:

$$x^2-20x+100=4x+20,$$

אָדער

$$x^2-24x+80=0.$$

לאָמיר לייזן די דאָזיקע גלײַכונג:

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 80} = 12 \pm \sqrt{64} = 12 \pm 8;$$

$$x_1 = 12 + 8 = 20; \quad x_2 = 12 - 8 = 4.$$

דורך אונטערשטעלן וועלן מיר זיך איבערצײַגן, אַז די געגעבענע גלײַכונג באַפרידיקט זיך נאָר מיט דער צאָל 20, און די צאָל 4 באַפרידיקט זי ניט.

באמערקונג. עס עקזיסטירן מיטלען אַפ צו באַפרײַען גלײַכונגען פון א באַליבּיקער צאָל ראַדיקאַלן אין אַלע מאָדרייגעס; מיר האָבן זיך באַגרענעצט בלויז מיט אַנווײַזן די סאַמע פּאַשעטסטע פאַלן.

געניטונגען:

52. $x - 5 = \sqrt{x} + 1$; $3 + 2\sqrt{x} = 5$; $\sqrt{3x - 5} - 4 = 5$.

53. $5\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$; $7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$.

(אין די לעצטע צוויי בײַשפּילן דאַרף מען צוערשט צונויפגיסן די ענלעכע ראַדיקאַלן).

54. $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$; $x - \sqrt{25 - x^2} = 7$.

צווייטער אָפּטייל.

פונקציעס אונ זייערע גראַפיקעס.

I. פונקציאָנעלע אָפּהענגיקייט.

24. קאָנסטאַנטע (שטענדיקע) **אונ פאַרענדערלעכע גרייסנ.** זאָל 1 קג פונ וועלכער עס איז סכוירע קאָסטנ a רובל. מיר וועלנ זיכ דערוויסנ דעם ווערט פונ x קילאָגראַמענ פונ דער זעלביקער סכוירע. באַצייכענענדיק די געזוכטע גרייס דורכ y, וועלנ מיר באַקומענ:

$$y = ax.$$

די דאָזיקע פאָרמולע דערלויבט אונדז אויסצורעכענענ די סומע, וועלכע מע דאַרפ באַצאָלנ פאַר יעטווידער סכום פונ דער געגעבענער סכוירע. אַזוי:

דער ווערט פונ $2x$ קג דריקט זיכ אויס אינ $2a$ רוב.

„ „ „ 5 „ „ „ „ „ $5a$ „

„ „ „ $3{,}5$ „ „ „ „ „ $3{,}5a$ „ א. א. וו.

אינ דער געגעבענער פאָרמולע גייענ אַרײַנ דרײַ גרייסנ: x—דער סכום סכוירע; y—זײַנ ווערט, אונ a—דער פרײַז פונ איינ קילאָגראַם סכוירע. מיר זעענ, אַז אינ דער צײַט, ווענ די ערשטע צוויי פונ די גרייסנ x אונ y באַקומענ פאַרשיידענע צאָליקע באַדײַטונגענ, רעכענענ מיר די דריטע גרייס a פאַר אַזאַ, וואָס פאַרבלײַבט אָנ אַנ ענדערונג.

מיר וועלנ נעמענ די פאָרמולע, וועלכע דריקט אויס די לענג פונ אַ קרײַזליניע אָפּהענגיק פונעם ראַדיוס:

$$C = 2\pi R.$$

דאָ איז π אַ צאָל, וועלכע דריקט אויס די פאַרהעלטעניש פונ דער לענג פונ דער קרײַזליניע צום דיאַמעטער. אָנעמענדיק פאַר דער גרייס π די צאָל 3,14 (מיט אַ פּינקטלעכקײַט ביז 0,01), וועלנ מיר האָבנ:

$$C = 6{,}28R.$$

געבנדיק פארשיידענע צאָליקע באדײַטונגענ דעמ ראדיוס, וועלנ מיר קענענ קריגנ דער דאָזיקער פאָרמולע אויסרעכענענ אנטשפּרעכיק די לענג פונ דער קרײַזליניע. אזוי:

באַ $R=1$ וועט די לענג פונ דער קרײַזליניע זײַנ $C=6{,}28$,
„ $R=3$ „ „ „ „ „ „ „ „ $C=18{,}84$,
„ $R=4{,}2$ „ „ „ „ „ „ „ „ $C=21{,}352$ א. א. וו.

פונקט ווי אינעמ ערשטנ פאל, ענדערנ זיכ דאָ די גרייסנ C אונ R (זיי נעמענ אָנ פארשיידענע צאָליקע באדײַטונגענ), אָבער דער קאָעפיציענט 6,28 פארבלײַבט אָנ ענדערונגענ.

די גרייסנ, וועלכע פארבלײַבנ אומגעענדערט, הייסנ **קאָנסטאנטע** (שטענדיקע). גרייסנ, וועלכע קענענ אָנעמענ פארשיידענע באדײַטונגענ, הייסנ **פארענדערלעכע**.

לאָמיר באמערקנ, אז קאָנסטאנטע גרייסנ קענ מענ פארשטײַנ בלויז אינ רעליאַטיוו זינ אינ די גרענעצנ פונ דער באטראכטער פראגע. אינ דערווירקלעכקײַט פונעמ לעבנ קענענ מיר ניט אָנווײַזנ אפ אזא גרייס, וועלכע זאָל זיכ ניט ענדערנ. אינ דעמ אויבנגעבראכטנ בײַשפּיל קענ דער פרײַז פונ דער סכוירע אינ פארלויפ פונ א באשטימטער צײַט זיכ ענדערנ.

געוויינלעכ ווערנ די קאָנסטאנטע גרייסנ, וואָס גייענ ארײַנ אינ דער פאָרמולע, באצייכנט מיט די ערשטע בוכשטאבנ פונעמ לאטייניש אלפאוויט: $a, b, c, m \ldots$ אונ די פארענדערלעכע — מיט די לעצטע — z, y, x; פארשטייט זיכ, דער דאָזיקער קלאל ווערט ניט שטענדיק אָפּגעהיט.

25. **ארגומענט אונ פונקציע.** באטראכטנדיק די פארענדערלעכע גרייסנ אינ די געבראכטע בײַשפּילנ, באמערקנ מיר, אז בייס צוויי פונ זיי (דער סכומ סכוירע, די לענג פונעמ ראדיוס) האָבנ מיר געענדערט לויט אונדזער ווילנ, געגעבנ זיי פארשיידענע צאָליקע באדײַטונגענ, האָבנ די איבעריקע (דער ווערט פונ דער גאנצער סכוירע, די לענג פונ דער קרײַזליניע) אָנגענומענ די אָדער אנדערע צאָליקע באדײַטונגענ שוינ אָפּהענגיק פונ דעמ, וועלכע באדײַטונגענ מיר האָבנ געגעבנ די ערשטע.

יענע פונ צוויי, צונויפגעבונדענע צווישנ זיכ, פארענדערלעכע גרייסנ, וואָס נעמט אָנ פארשיידענע צאָליקע באדײַטונגענ, הייסט אומאָפּהענגיק-פארענדערלעכע, אָדער ארגומענט.

די פארענדערלעכע גרייס, וואָס אירע צאָליקע באדײַטונגענ ענדערנ זיכ אָפּהענגיק פונ די צאָליקע באדײַטונגענ פונ דער אנדערער, הייסט די אָפּהענגיק-פארענדערלעכע, אָדער פונקציע פונ דער צווייטער פארענדערלעכער גרייס.

אזוי, איז אינ די אויבנגעבראכטע בײַשפּילנ דער ווערט פונ דער סכוירע א פונקציע פונ איר צאָל; די לענג פונ דער קרײַזליניע איז א פונקציע פונעמ ראדיוס פונ קרײַז.

אָפּטמאָל הענגט אָפּ די פאַרענדערלעכע גרייס ניט פונ איינער, נאָר פונ צוויי, דריַ אונ מער אנדערע פאַרענדערלעכע גרייסנ. דאַנ הייסט זי א פונקציע פונ צוויי, דריַ אונ מער פאַרענדערלעכע גרייסנ.

בײַשפּילנ:

1) די פאָרמולע פונ א גלײַכמעסיקער באַוועגונג ווערט אויסגעדריקט אַזוי:

$$y = vx.$$

דאָ איז v (שנעלקײַט) א קאָנסטאַנטע גרייס; x (די צײַט) — אנ אומאָפּהענגיק־פאַרענדערלעכע (אַרגומענט) אונ y—א פונקציע פונ דעם אַרגומענט.

2) דער שעטעכ פונ א קרײַז ווערט אויסגעדריקט דורכ דער פאָרמולע:

$$S = \pi R^2.$$

דאָ איז R (ראַדיוּס) אנ אַרגומענט; S (שעטעכ)—א פונקציע; π—א קאָנסטאַנטע גרייס.

3) די ספּעציפישע וואָג פונ א קערפּער ווערט אויסגעדריקט לויט דער פאָרמולע:

$$d = \frac{P}{v}.$$

דאָ איז d (ספּעציפישע וואָג) א פונקציע פונ צוויי פאַרענדערלעכע: P (די וואָג פונעמ קערפּער) אונ v (דער פאַרנעמ פונעמ קערפּער).

4) דער געזעצ פונ דזשאָול־לענצ ווערט אויסגעדריקט דורכ דער פאָרמולע:

$$Q = qI^2Rt.$$

דאָ איז Q (דער סכומ וואַרעמקײַט) א פונקציע פונ דרײַ פאַרענדערלעכע: I (די קראַפט פונעמ שטראָמ), R (דער ווידערשטאַנד פונעמ שטראָמ־דורכפירער) אונ t (די צײַט). די קאָנסטאַנטע גרייס, וועלכע איז גלײַכ צו 0,24, איז דער אַזוי גערופענער וואַרעמקײַט־עקוויוואַלענט פונ עלעקטרישער ענערגיע, אָדער די באַדײַטונג פונ Q בא $I = 1$, $R = 1$, $t = 1$.

26. דרײַ אויפאַנימ פונ אויסדריקנ א פונקציאָנעלע אָפּהענגיקײַט.

א) באַמ דערלערנענ די פונקציאָנעלע אָפּהענגיקײַט צווישנ צוויי פאַרענדערלעכע גרייסנ סטאַרענ מיר זיכ צוערשט באַשטימענ, וועלכע צאָליקע באַדײַטונגענ נעמט אָנ איינע פונ זיי אָפּהענגיק פונ דער ענדערונג פונ די צאָליקע באַדײַטונגענ פונ דער צווייטער.

לאָמיר, צומ בײַשפּיל, וועלנ דערלערנענ די אָפּהענגיקײַט צווישנ דער לענג פונ אנ אײַזערנעמ שטאַנג אונ זײַנ טעמפּעראַטור. מיר וועלנ אָנוואַרעמענ אנ אײַזערנעמ שטאַנג, וואָס איז, לאָמיר זאָגנ, 1 מ די לענג בא 0°, אונ אויסמעסטנ זײַנ לענג בא פאַרשיידענע טעמפּעראַטורנ. די רעזולטאַטנ פונ די באַאָבאַכטונגענ קענענ מיר פאָר־

שטעלנ אינ דער פאָרמ פונ א טאַבעלע. אינעמ געגעבענעמ פאַל וועט זי האָבנ, צומ בײַשפּיל, אזא אויסזענ:

טעמפּעראַטור	0°	50°	80°	100°	350°	600°	1000°
די לענג פונעמ שטאַנג . . .	1 מ	1,0006 מ	1,00096 מ	1,0012 מ	1,0042 מ	1,0072 מ	1,012 מ א. א. ו.[1]

פונ דער דאָזיקער טאַבעלע זעענ מיר, אז די לענג פונעמ שטאַנג ווערט מיט דער העכערונג פונ זײַנ טעמפּעראַטור פאַרגרעסערט. אזא אופנ פונ אויסדריקנ די פונקציאָנעלע אָפּהענגיקײַט צווישנ גרייסנ הייסט א ט א ב ע ל י א ר ע ר.

ב) דער טאַבעליארער אויסדרוק־אופנ פונ פונקציאָנעלער אָפּהענגיקײַט איז ניט באַקוועמ דערמיט, וואָס ער גיט אונדז ניט אינ דער פולער מאָס דעמ באַגריפ וועגנ דעמ כאַראַקטער פונ דער אָפּהענגיקײַט. אזוי, דערוויסנ מיר זיכ אינ דעמ פאָריקנ בײַשפּיל די לענג פונעמ שטאַנג בלויז בא עטלעכע באַשטימטע באַדײַטונגענ פונ דער טעמפּעראַטור. קעדיי מיר זאָלנ וויסנ די לענג פונעמ שטאַנג בא יעטווידער טעמפּעראַטור, וועלנ מיר דאַרפנ אויסדריקנ די אָפּהענגיקײַט צווישנ דער לענג פונעמ שטאַנג אונ דער טעמפּעראַטור אינ אנ אַלגעמײנער פאָרמ, אינעמ אויסזענ פונ א פאָרמולע.

מיר וועלנ אויסרעכענענ, אפ וויפל פאַרגרעסערט זיכ די לענג פונעמ שטאַנג באַמ העכערנ די טעמפּעראַטור אפ 1°. בא א טעמפּעראַטור פונ 50° איז די לענג פונעמ שטאַנג געווענ 1,0006 מ, בא א טעמפּעראַטור פונ 80° איז די לענג געוואָרנ גלײַכ צו 1,00096 מ. הייסט עס, באַמ העכערנ די טעמפּעראַטור אפ 80 — 50 = 30° וועט די פאַרלענגערונג פונעמ שטאַנג זײַנ גלײַכ צו

$$1{,}00096 - 1{,}0006 = 0{,}00036 \text{ מ}.$$

פונדאַנענ דרינגט אַרויס, אז די פאַרלענגערונג באַמ העכערנ די טעמפּעראַטור אפ 1° איז גלײַכ צו

$$0{,}00036 : 30 = 0{,}000012 \text{ מ}$$

נעמענדיק די לענג פונעמ שטאַנג בא אנדערע טעמפּעראַטורנ, צומ בײַשפּיל 80° אונ 350°, אונ דורכמאַכנדיק די געהעריקע אויסרעכענונגענ, וועלנ מיר אויכ געפינענ די גרייס 0,000012. אזויאַרומ, מאַכנ מיר דעמ אויספיר, אז אנ אײַזערנער שטאַנג פונ 1 מ די לענג בא 0° ווערט בא העכערנ די טעמפּעראַטור אפ 1° לענגער אפ 0,000012 מ. וויסנדיק דאָס, קענענ מיר צונויפשטעלנ אנ אַלגעמײנע פאָרמולע פונ דער אָפּהענגיקײַט צווישנ דער לענג פונ א שטאַנג אונ זײַנ טעמפּעראַטור.

באַמ העכערנ די טעמפּעראַטור אפ 1° ווערט דער שטאַנג לענגער אפ 0,000012 מ. הייסט עס, באַמ העכערנ די טעמפּעראַטור אפ $t°$ וועט די פאַרלענגערונג זײַנ גלײַכ

[1] לאָמיר באַמערקנ, אז פאַקטיש וועט די לענג פונעמ שטאַנג, אָפּהענגיק פונ פאַרשיידענע באַדינגונגענ, בלויז אומגעפער צונויפפאַלנ מיט די באַדײַטונגענ, וואָס זײַנענ דאָ געבראַכט.

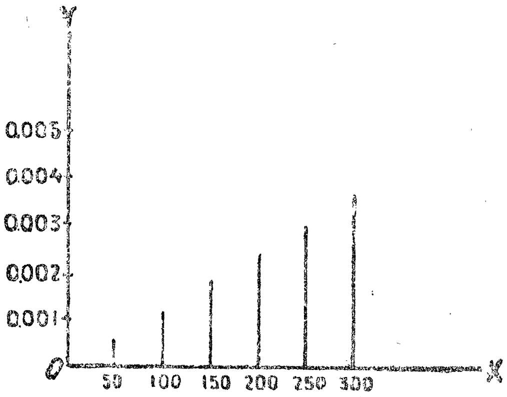
צו $0,000012\,t$ מ. צולייגנדיק די דאָזיקע פארלענגערונג צו דער אָנפאנגלעכער לענג פונעם שטאנג בא 0° (1 מ) אונ באצייכענענדיק די לענג פונ שטאנג בא t° דורכ l, וועלנ מיר באקומענ די פאָרמולע:

$$l = 1 + 0{,}000012\,t.$$

די דאָזיקע פאָרמולע דערלויבט אויסצורעכענענ די לענג פונ א שטאנג בא יעטווידער טעמפעראטור. אינ אונדזער פאל, געבנדיק דעם t די באדייטונגענ 50, 80, 100 א.א.וו., באקומענ מיר פאר l די באדייטונגענ, וועלכע מיר האָבנ שוינ געהאט אינ דער טאבעלע.

אזא אויפנ פונ אויסדריקנ א פונקציאָנעלע אָפהענגיקייט מיט דער הילפ פונ א פאָרמולע הייסט אנ אנאליטישער.

ג) ענדלעכ, מיטנ ציל פונ אָנשוילעכקייט, דריקנ מיר אָפט אויס די אָפהענגיקייט צווישנ צוויי גרייסנ אפ א גראפישנ אויפנ — מיט דער הילפ פונ א צייכענונג, א דיאגראמ (גראפיק). אינ אונדזער ביישפיל וואָלטנ מיר געקענט טאָנ אזוי:



צייכ. 2.

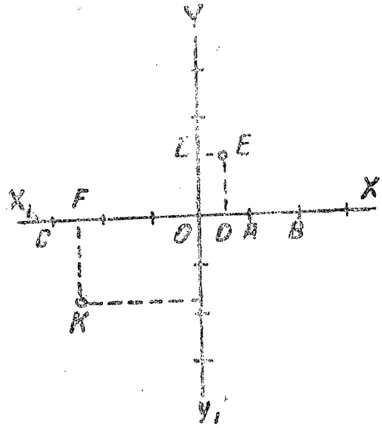
מיר וועלנ דורכפירנ צוויי קעגנזייטיק פערפענדיקולארע גראָדע OX אונ OY אונ מיר וועלנ אָפלייגנ אפ דער גראָדער OX פונעם פונקט O אָפשניטנ, פראָפאָרציאָנעל צו דער טעמפעראטור, אונ אפ דער גראָדער OY אָפשניטנ, פראָפאָרציאָנעל צו דער פארלענגערונג פונעם שטאנג אינ א באשטימטנ מאסשטאב (אפנ געמעל אנטשפרעכט 1 טיילונג אפ דער האָריזאָנטאלער גראָדער 50°, אונ אפ דער ווערטיקאלער גראָדער 0,001 מ).

פאר יעדער באדייטונג פונ t לייגנ מיר אָפ פונעם געהעריקנ פונקט אנ אָפשניט, וועלכער איז פאראלעל צו OY אונ איז גלייכ צו דער פארלענגערונג פונעם שטאנג (אינעם אָנגענומענעם מאסשטאב). מיר וועלנ באקומענ א גראפיק, וועלכע איז געגעבנ אפנ געמעל 2.

דער גראפישער אויסדרוק פונ פונקציאָנעלער אָפהענגיקייט ווערט ברייט אויסגענוצט אינ מאטעמאטיק, דערביי ווערט אָנגעווענדט א באזונדער מעטאָד, דער אזויגערופענער קאָאָרדינאטנ-מעטאָד, מיט וועלכנ מיר וועלנ זיכ וייטער באקאָנענ.

27. קאָאָרדינאטנ-מעטאָד. לאָמיר נעמענ צוויי פערפענדיקולארע צווישנ זיכ גראָדע: xx_1 אונ yy_1 (געמעל 3), וועלכע קרייצנ זיכ איבער אינעם פונקט O. מיר וועלנ אָנעמענ, ווייטער, א וועלכנ עס איז אָפשניט פונ דער גראָדער (צום ביישפיל, איינ סאנטימעטער) פאר דעם איינס פונ לענג אונ מיר וועלנ באשטימענ אָפלייגנ די באדייטונגענ פונ דער פארענדערלעכ-אומאָפהענגיקער צאָל x אפ דער גראָדער xx_1,

אָנהייבנדיק פונעמ פונקט O ווי אַנ אָנהייב, דערבײַ וועלנ מיר די פּאָזיטיווע באַ-דײַטונגענ פונ x אָפּלייגנ רעכטס פונ O, אונ די נעגאַטיווע—לינקס פונ O. אַפּ אַזאַ אופנ וועט דער אָפּשניט OA אויסדריקנ אונדז די באַדײַטונג פונעמ x, וואָס איז גלײַכ צו $+1$, דער אָפּשניט OB—די באַדײַטונג פונעמ x, וואָס איז גלײַכ צו $+2$, דער אָפּשניט OC—די באַדײַטונג פונעמ x, וואָס איז גלײַכ צו -3 א.א.וו. דער עצעמ פונקט O שטעלט פאָר די באַדײַטונג פונעמ x, וואָס איז גלײַכ צו נול. די באַדײַטונגענ פונ דער פונקציע y, וואָס אַנטשפּרעכנ די דאָזיקע באַדײַטונגענ פונ x, וועלנ מיר באַשטימענ אָפּצולייגנ אַפּ די גראָדע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט דורכ די פונקטנ A,B,C..., פּאַראַלעל צו YY_1 (אַנדערש געזאָגט, אַפּ די פּערפּענדיקולארנ צו דער גראָדער XX_1), דערבײַ וועלנ מיר די פּאָזיטיווע באַדײַטונגענ פונ דער פונקציע אָפּלייגנ העכער פונ דער גראָדער XX_1, אונ די נעגאַטיווע—נידעריקער פונ איר. אויב, צומ בײַשפּיל, בײַ $x = +\frac{1}{2}$ וועט די באַדײַטונג פונעמ y זײַנ $+1\frac{1}{4}$, וועלנ מיר אַפּ דער גראָדער XX_1 נעמענ דעמ אָפּשניט OD, וואָס איז גלײַכ צו $+\frac{1}{2}$, אונ אויפשטעלנ דעמ פּערפּענדיקוליאר DE, וועלכער איז גלײַכ צו $+1\frac{1}{4}$; דעמלט וועט דער פונקט E אויסדריקנ אונדז די באַדײַטונג פונעמ y, וואָס איז גלײַכ צו $+1\frac{1}{4}$. אַפּנ זעלבנ אופנ וועט דער פונקט K אויסדריקנ די באַדײַטונג פונעמ y, וואָס איז גלײַכ צו $-1\frac{3}{4}$ בײַ $x = -2\frac{1}{2}$ א.א.וו.



צייכ. 3.

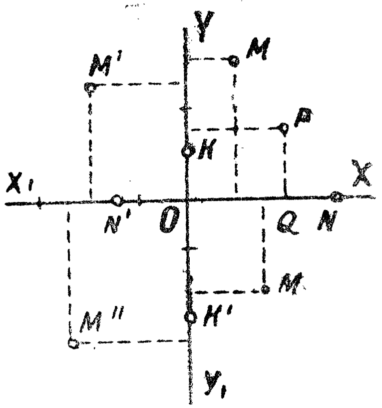
מיר וועלנ באַמערקנ, אַז די פונקטנ E, K..., וועלכע דריקנ מיט זיכ אויס די באַדײַטונגענ פונ דער פונקציע y, קענענ מיר באַקומענ עטוואָס אַנדערש, נעמלעכ: אָנשטאָט דעמ, וואָס מע זאָל אַפּ די פּערפּענדיקולארנ DE, FK... אָפּלייגנ אָפּשניטנ, וועלכע דריקנ אויס די באַדײַטונגענ פונעמ y, קענענ מיר זיי אָפּלייגנ אַפּ דער גלײַכער YY_1, אָנהייבנדיק פונעמ פונקט O, אונ נאָכדעמ פונ די עקנ פונ די דאָזיקע אָפּשניטנ דורכפירנ גראָדע, פּאַראַלעל צו XX_1 ביז דער איבערקרייצונג מיט די אַנטשפּרעכנדיקע פּערפּענדיקולארנ. אַזוי, אָפּלייגנדיק $OL = +1\frac{1}{4}$ אונ דורכפירנ-דיק $LE \parallel OX$, באַקומענ מיר דעמ פונקט E, ד. ה. דעמ זעלביקנ פונקט, וועלכנ מיר האָבנ פריִער באַקומענ, אָפּלייגנדיק $DE = +1\frac{1}{4}$. דאָס זעלביקע קענ מענ זאָגנ וועגנ דעמ פונקט K אונ וועגנ אַלע אַנדערע ענלעכע פונקטנ.

די אָפּשניטנ OD, OF..., וועלכע ווערנ אָפּגעלייגט אַפּ דער גראָדער XX_1 אונ וועלכע דריקנ אויס די באַדײַטונגענ פונעמ ארגומענט x, הייסנ **א ב ס צ י ס**

OD) איז די אַבסציסע פונעם פונקט E, OF—די אַבסציסע פונעם פונקט K א.אַ.וו.); די אָפּשניטן DE, FK..., וועלכע ווערן אָפּגעלייגט אַפּ די פּערפּענדיקולאַרן צו XX_1 (אָדער אַפּ דער גראָדער yY_1) און וועלכע דריקן אויס די באַדײַטונגען פון דער פונקציע y, הייסן אָרדינאַטן (DE איז די אָרדינאַטע פונעם פונקט E, FK—די אָרדינאַטע פונעם פונקט K א. אַ. וו.); די און יענע צוזאַמען הייסן די קאָאָרדינאַטן פון די פונקטן E, K... (פינקטלעכער, קאָאָרדינאַטן הייסן די פאַרהעלטענישן פון די דערמאָנטע אָפּשניטן צום אָפּשניט, וואָס איז אָנגענומען פאַר אַן איינס).

די אומבאַגרענעצטע גראָדע XX_1, אַפּ וועלכער עס לייגן זיך אָפּ די אַבסציסן, הייסט די אַקס פון די אַבסציסן, אָדער די x־אַקס (אַקס פון איקסן); די אומבאַגרענעצטע גראָדע YY_1, אַפּ וועלכער (אָדער פּאַראַלעל צו וועלכער) עס לייגן זיך אָפּ די אָרדינאַטן, הייסט די אַקס פון אָרדינאַטן אָדער y־אַקס (אַקס פון איגרעקן); ביידע גראָדע, גענומען צוזאַמען, הייסן קאָאָרדינאַטן־אַקסן. דער פונקט O הייסט דער אָנהייב פון די קאָאָרדינאַטן [1].

28. די לאַגע פון א פונקט אַפּ א פלאַך. באַנוצנדיק זיך מיט דער קאָאָרדינאַטן־סיסטעם, קענען מיר לייזן אַזעלכע אויפגאַבעס:



צייכ. 4.

א) עס איז געגעבן א פונקט אַפּ א פלאַך; באַשטימט זײַנע קאָאָרדינאַטן. לאָמיר האָבן אַפּ א פלאַך דעם פונקט P (געמעל 4). מיר וועלן פון אים אַראָפּלאָזן דעם פּערפּענדיקולאַר PQ אַפּ דער X־אַקס. אויסמעסטנדיק מיט דעם אָנגענומענעם איינס דעם אָפּשניט OQ, וועלן מיר געפינען די אַבסציסע פונעם פונקט P. אויסמעסטנדיק דעם אָפּשניט PQ, וועלן מיר געפינען זײַן אָרדינאַטע. אַפּ אונדזער געמעל איז די אַבסציסע פונעם פונקט P גלײַך צו $+2$, און די אָרדינאַטע $+1\frac{1}{2}$. געוויינלעך שרײַבן זיך די קאָאָרדינאַטן פונעם פונקט אין קלאַמערן נעבן דעם בוכשטאַב, מיט וועלכן עס איז באַצייכנט דער פונקט.

אין אונדזער בײַשפּיל וועט עס זײַן אַזוי: $P\left(+2, +1\frac{1}{2}\right)$, אָדער פּאָשעט $P\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$. אַפּן ערשטן אָרט שרײַבט זיך שטענדיק די צאָל, וועלכע דריקט אויס די אַבסציסע, אַפּן צווייטן—די אָרדינאַטע.

[1] דער מעטאָד פון באַשטימען די לאַגע פון א פונקט אַפּ א פלאַך מיט דער הילף פון די צוויי אָנגעוויזענע קאָאָרדינאַטן איז אײַנגעפירט געוואָרן דורכן פראַנצויזישן מאַטעמאַטיקער רענע דעקאַרט (1650—1599 יאָר); דעריבער הייסן די קאָאָרדינאַטן דעקאַרטישע.

באמ געפינענ די קאָאָרדינאַטנ פונ א פונקט דארפ מענ שטענדיק האָבנ אינ זינענ דעמ צייכנ, וועלכנ עס וועט האָבנ די קאָאָרדינאַטע. אזוי, וועלנ די קאָאָרדינאַטנ פונעמ פונקט M''' זײַנ $1\frac{1}{2}$ (אבסציסע), אונ -2 (אָרדינאַטע); די קאָאָרדינאַטנ פונעמ פונקט M'' וועלנ זײַנ $-2\frac{1}{2}$ אונ -3 א.א.וו.

אויב מיר וועלנ נעמענ א פונקט אפ דער x־אקס, וועט איר אָרדינאַטע זײַנ נול, אונ די אבסציסע—א פּאָזיטיווע אָדער א נעגאַטיווע צאָל, וואָס באַדײַט זײַנ אָפּשטאַנד פונעמ פונקט O. אזעלכע זײַנענ, צומ בײַשפּיל, די פונקטנ $N(3,0)$ אונ $N'\left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$.

אויב דער פונקט איז גענומענ אפ דער y־אקס, איז זײַנ אבסציסע גלײַכ צו נול, אונ די אָרדינאַטע איז א צאָל, וועלכע באַדײַט זײַנ אָפּשטאַנד פונעמ פונקט O אזעלכע זײַנענ, צומ בײַשפּיל, די פונקטנ $K(0,1)$ אונ $K'\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$.

באמ אָנהייב פונ די קאָאָרדינאַטנ זײַנענ, ווי עס איז קלאָר צו זענ, די אבסציסע אונ אָרדינאַטע גלײַכ צו נול.

ב) געפינענ א פונקט לויט זײַנע געגעבענע קאָאָרדינאַטנ. מיר וועלנ באַטראַכטנ אייניקע פאַלנ.

1) זאָלנ די קאָאָרדינאַטנ פונ א פונקט זײַנ $(1, 3)$. מיר לייגנ אָפּ אפ דער x־אקס פונעמ פונקט O צו ר ע כ ט ס אַנ אָפּשניט, וועלכער איז גלײַכ צומ אָנגענומענעמ איינס. פונעמ באַקומענעמ פונקט שטעלנ מיר אופ א פּערפּענדיקוליאַר אונ אפ אימ לייגנ מיר אָפּ א י נ ד ע ר ה ו י כ אַנ אָפּשניט, וועלכער איז גלײַכ צו דרײַ איינסנ. דער באַקומענער פונקט M וועט זײַנ דער געזוכטער.

פונעמ אויבנגעזאָגטנ איז קלאָר, אז מיר וואָלטנ געקאָנט דעמ פונקט M געפינענ אויכ אפ א צווייטנ אופנ. נעמלעכ: מיר וועלנ אָפּלייגנ אפ דער x־אקס אַנ אָפּשניט, וועלכער איז גלײַכ צו 1, נאָכדעמ אפ דער y־אקס אַנ אָפּשניט, וועלכער איז גלײַכ צו 3, אונ פונ די באַקומענע פונקטנ וועלנ מיר דורכפירנ גראָדע, פּאַראַלעלע צו די אקסנ. דער קרייצ־פונקט פונ די דאָזיקע גראָדע וועט ווידער געבנ דעמ פונקט M.

2) זאָלנ די קאָאָרדינאַטנ פונ א פונקט זײַנ $\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$. קלאָר, אז דאָ וועט מענ די אבסציסע (-2) דארפנ אָפּלייגנ לינקס פונעמ פונקט O, אונ די אָרדינאַטע $\left(2\frac{1}{2}\right)$ אינדערהויכ. דער באַקומענער פונקט $M'\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$ וועט זײַנ דער געזוכטער.

3) אויב די קאָאָרדינאַטנ פונ א פונקט וועלנ זײַנ, צומ בײַשפּיל, $\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$, וועט די אבסציסע אויסקומענ אָפּצולייגנ צו לינקס, אונ די אָרדינאַטע—אראָפּ. מיר וועלנ באַקומענ דעמ פונקט $M''\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$.

4) צומ סאָפ, פאַר די קאָאָרדינאַטנ $\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$ וועלנ מיר באַקומענ דעמ פונקט $M'''\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$.

מיר זעענ, אז די קאָאָרדינאטנ פונ א פונקט האָבנ דעם אָדער יענעם צייכנ, ד. ה., זיי וועלנ זײַנ פּאָזיטיווע אָדער נעגאטיווע, אָפּהענגיק פונ דעם, אינ וועלכנ **קאָאָרדינאטנ־ווינקל** דער פונקט געפינט זיכ. מיר קענענ דאָס פאָרשטעלנ אינ דער פאָלגנדיקער טאבעלע, רעכענענדיק פארנ ערשטנ לויט דער ריי דעם אויבערשטנ רעכטנ קאָאָרדינאטנ־ווינקל אונ פירנדיק פונ אים די רעכענונג אינ דער ריכטונג קעגנ דער באוועגונג פונעם זייגער־ווײַזער:

קאָאָרדינאטנ־ווינקל	אבסציסע x	אָרדינאטע y
1־טער	+	+
2־טער	−	+
3־טער	−	−
4־טער	+	−

געניטונגענ:

ווײַזט אָנ אפנ געמעל פונקטנ לויט די פאָלגנדיקע קאָאָרדינאטנ

55. (2, 3), (3, 2), (2, −3), (−3, 2) (−3, −2).

56. $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$, $\left(3\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-3\frac{1}{2}, 0\right)$, (0, 0).

II. גלײַכע אונ פארקערטע פּראָפּאָרציאָנעלקײַט.

29. **גלײַכ־פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקײַט.** יעדערער ווייס פונ דערפארונג, אז ווענ דער פארנעם פונ וואסער וועט זיכ פארגרעסערנ (אָדער פארקלענערנ) אינ א וועלכער עס איז פארהעלטעניש, וועט זיכ אויכ זײַנ וואָג פארגרעסערנ (אָדער פארקלענערנ) אינ דער זעלביקער פארהעלטעניש. צום בײַשפּיל, 1 ל וואסער וועגט 1 קג, 2 ל וואסער וועגנ 2 קג, $2\frac{1}{2}$ ל וואסער וועגנ $2\frac{1}{2}$ קג א. א. וו. (עס ווערט גערעכנט געוויינלעכ, אז אלע איבעריקע באדינגונגענ, וועלכע ווירקנ אפ דער וואָג פונ וואסער, פארבלײַבנ ניט געענדערט; צום בײַשפּיל, דאָס וואסער ווערט גענומענ פונ א גלײַכער ריינקײַט בא א גלײַכער טעמפּעראטור א. א. וו.). אזא פארהעלטעניש צווישנ דעם פארנעם פונעם וואסער אונ זײַנ וואָג הייסט **פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקײַט.** אינ אלגעמיינ, ווענ מע זאָגט, אז צוויי גרייסנ געפינענ זיכ צווישנ זיכ אינ א פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקײַט (אָדער זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל איינע צו דער צווייטער), הייסט עס, אז בא דער פארגרעסערונג (אָדער פארקלענערונג) פונ איינער פונ זיי אינ א וועלכער עס איז פארהעלטעניש, וועט אויכ די צווייטע זיכ פארגרעסערנ (אָדער פארקלענערנ) אינ דער זעלביקער פארהעלטעניש. אזוי, איז דער ווערט פונ סכוירע, וועלכע ווערט פארקויפט אפנ וואָג, פּראָפּאָרציאָנעל צו איר וואָג; דער לוינ פונ ארבעטער איז פּראָפּאָרציאָנעל צו זייער צאָל (בא די זעלביקע איבעריקע באדינגונגענ); די גרייס פונ א ברוכצאָל איז פּראָפּאָרציאָנעל צו איר ציילער בא אנ

אומפארענדערלעכנ דײַטער; דער שטעכ פונ א גראָדעק איז פּראָפּאָרציִאָנעל צו זײַנ באזיס בא אנ אומפארענדערלעכער הייכ אונ פּראָפּאָרציִאָנעל צו זײַנ הייכ בא אנ אומפארענדערלעכנ באזיס א.א.וו.

30. דער אויסדרוק פונ א פּראָפּאָרציִאָנעלער אָפּהענגיקײַט דורכ א פאָרמולע. לאָמיר האָבנ צוויי וועלכע עס איז פּראָפּאָרציִאָנעלע גריִסנ (צום בײַשפּיל, די וואָג פונ א סכוירע אינ איר ווערט) אונ לאָמיר רעכענענ, אז ווענ איינע פונ זיי איז גלײַכ צום איינס פונ דער דאָזיקער גרייס, וועט די צווייטע דאנ זײַנ גלײַכ צו k איינסנ פונ דער צווייטער גרייס (צום בײַשפּיל, ווענ די וואָג פונ א סכוירע איז גלײַכ צו 1 קג, וועט איר ווערט, לאָמיר זאָגנ, זײַנ 1 רוב.). ווענ מיר וועלנ איצט פאָרשטעלנ זיכ, אז די ערשטע גרייס וועט ווערנ גלײַכ צו x איינסנ, וועט דעמלט די צווייטע גרייס פונ k איינסנ פארוואנדלענ זיכ אינ אנ אנדער צאָל: y איינסנ (צום בײַשפּיל, ווענ עס וועט גענומענ ווערנ סכוירע ניט 1 קג, נאָר 3 קג, וועט איר ווערט אָנטרעפנ ניט 1 רוב., נאָר 3 רוב.). אזויווי די דורכ אונדז גענומענע גרייסנ זײַנענ פּראָפּאָרציִאָנעל, דארפ די צאָל y זײַנ גרעסער אָדער קלענער פונ דער צאָל k אינ דער פארהעלטעניש, אינ וועלכער די צאָל x איז גרעסער אָדער קלענער פונ 1. הייסט עס, מיר וועלנ דאנ האָבנ א פּראָפּאָרציע:

$$y:k=x:1,$$

פונ וועלכער מיר וועלנ געפינענ:

$$y=kx.$$

ווענ צוויי גרייסנ זײַנענ פּראָפּאָרציִאָנעל, קענ די אָפּהענגיקײַט צווישנ זיי אויסגעדריקט ווערנ דורכ דער פאָרמולע: $y=kx$, אינ וועלכער x אונ y זײַנענ פארענדערלעכע גרייסנ, וועלכע דריקנ אויס די אנטשפּרעכיקע באדײַטונגענ פונ די גענומענע גרייסנ, אונ k איז א קאָנסטאנטע צאָל, וועלכע איז גלײַכ צו דער באדײַטונג פונ y בא $x=1$. אָט די קאָנסטאנטע צאָל הייסט דער קאָעפיציִענט פונ פּראָפּאָרציִאָנעלקײַט פונ די גענומענע גרייסנ.

אָנווענדנדיק, צום בײַשפּיל, אָט די פאָרמולע צו דער וואָג פונ א סכוירע אונ איר ווערט, וועלנ מיר האָבנ:

דער ווערט פונ דער סכוירע איז גלײַכ צו k געקייפלט אפ דער וואָג פונ דער סכוירע.

פארקערט, אויב די אָפּהענגיקײַט צווישנ צוויי וועלכע עס איז פארענדערלעכע גרייסנ, וואָס מיר באצייכענענ זיי דורכ x אונ y, ווערט אויסגעדריקט דורכ דער פאָרמולע פונעמ אויסזעה $y=kx$, ווו k איז א וועלכע עס איז פאר די דאָזיקע גרייסנ קאָנסטאנטע צאָל, זײַנענ אזעלכע גרייסנ פּראָפּאָרציִאָנעל, ווײַל פונ דער דאָזיקער פאָרמולע איז צו זענ, אז בא דער פארגרעסערונג (אָדער פארקלענערונג)

פון דער גרייס x אין וועלכער עס איז פאַרהעלטעניש וועט זיך די צווייטע גרייס y אויך פאַרגרעסערן (אָדער פאַרקלענערן) אין דער זעלביקער פאַרהעלטעניש. צום בײַשפּיל, ווי עס איז באַוווּסט פון געאָמעטריע, ווערט די לענג C פון דער קרײַז־ליניע פונעם ראַדיוס R אויסגעדריקט דורך דער פאָרמולע:

$$C = 6{,}28R (C = 2\pi R),$$

אין וועלכער R און C זײַנען פאַרענדערלעכע גרייסן, און 6,28—א קאָנסטאַנטע גרייס; דערפון קענען מיר מאַכן אַן אויספיר, אַז די לענג פון א קרײַזליניע איז פּראָפּאָרציאָנעל צו איר ראַדיוס.

31. פאַרקערט־פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקײַט. עס קען טרעפן, אַז צוויי פאַרענדערלעכע גרייסן זײַנען אָפּהענגיק איינע פון דער צווייטער אַזוי, אַז ווען איינע פון זיי פאַרגרעסערט זיך, פאַרקלענערט זיך די צווייטע, און דערבײַ פאַרקלענערט זי זיך אין דער פאַרהעלטעניש, אין וועלכער די ערשטע פאַרגרעסערט זיך. אַזעלכע גרייסן הייסן **פאַרקערט־פּראָפּאָרציאָנעלע** (און גרייסן איינפאַך-פּראָפּאָרציאָנעלע רופן זיך אָפט **גלײַך-פּראָפּאָרציאָנעלע**). צום בײַשפּיל, די צאָל שאָען, אין משך פון וועלכע אַן אײַזנבאַן־צוג גייט דורך דעם גאַנצן וועג פון מאָסקווע ביז לענינגראַד, איז פאַרקערט-פּראָפּאָרציאָנעל צו דער דורכשניטלעכער באַוועגונג־שנעלקײַט פון דעם זעלבן צוג, ווײַל בא דער פאַרגרעסערונג פון דער שנעלקײַט אין $1\frac{1}{2}$ מאָל, אין 2 מאָל..., אין אַלגעמיין אין א וועלכער עס איז פאַרהעלטעניש, וועט די צאָל שאָען, אין משך פון וועלכע דער צוג וועט דורכגיין די שטרעקע צווישן מאָסקווע און לענינגראַד, זיך פאַרקלענערן אין $1\frac{1}{2}$ מאָל, 2 מאָל..., אין אַלגעמיין, אין דער זעלביקער פאַרהעלטעניש, אין וועלכער די שנעלקײַט האָט זיך פאַרגרעסערט. ענלעך צו דעם איז די וואָג פון סכוירע, וועלכע מע קען קויפן פאַר דער געגעבענער סומע געלט, צום בײַשפּיל, פאַר 100 רובל, פאַרקערט־פּראָפּאָרציאָנעל צו דעם פּרײַז פון א קילאָגראַם פון דער דאָזיקער סכוירע; די צײַט, אין משך פון וועלכער אַרבעטער פילן אויס די פאַרגעגעבענע אַרבעט, איז פאַרקערט-פּראָפּאָרציאָנעל צו דער צאָל אַרבעטער (פאַרשטייט זיך, באַם באַדינג, אַז אַלע אַרבעטער אַרבעטן מיט דער זעלביקער פּראָדוקטיווקײַט); די גרייס פון א ברוכצאָל איז פאַרקערט-פּראָפּאָרציאָנעל צו איר דײַטער (בא א קאָנסטאַנטן ציילער) א.א.וו.

באַמערקונג. קעדײַ צוויי, איינע פון דער צווייטער אָפּהענגיקע, גרייסן זאָלן זײַן פּראָפּאָרציאָנעל (גלײַך אָדער פאַרקערט), איז נאָך ווייניק בלויז דער סימען, אַז בא דער פאַרגרעסערונג פון איין גרייס ווערט די צווייטע אויך פאַרגרעסערט (פאַר א גלײַכער פּראָפּאָרציאָנעלקײַט), אָדער, אַז בא דער פאַרגרעסערונג פון איין גרייס ווערט די צווייטע פאַרקלענערט (פאַר פאַרקערטער פּראָפּאָרציאָנעלקײַט). צום בײַשפּיל, ווען א וועלכע עס איז כיבערצאָל ווערט גרעסער, וועט אויך גרעסער ווערן די סומע; נאָר עס וואָלט געווען א טאָעס צו זאָגן, אַז די סומע איז פּראָפּאָרציאָנעל צו דער דאָזיקער כיבערצאָל, ווײַל, אויב מיר וועלן פאַרגרעסערן די כיבערצאָל, לאָמיר זאָגן, אין 3 מאָל, וועט זיך די סומע פאַרגרעסערן, אָבער ניט אין 3 מאָל. ענלעך צו דעם, קען מען, צום בײַשפּיל, ניט זאָגן, אַז די דיפערענץ איז פאַרקערט־

פראָפאָרציאָנעל צו דער ביסער־צאָל, ווײַל ווען עס זאָל פאַרגרעסערט ווערן די ביסערצאָל, לאָמיר זאָגנ, אינ 2 מאָל, וועט די דיפערענצ זיכ פאַרקלענערנ, אָבער ניט אינ 2 מאָל. עס איז נייטיק, אז די פאַרגרעסערונג אָדער די פאַרקלענערונג פונ בײדע גרייסנ זאָל פאָרקומענ אינ איינ און דער זעלביקער צאָל מאָל (אינ דער זעלביקער פאַרהעלטעניש).

32. אויסדריקנ א פאַרקערט־פראָפאָרציאָנעלע פאַרהעלטעניש דורכ א פאָרמולע.

מיר וועלנ נעמענ וועלכע עס איז צוויי פאַרקערט־פראָפאָרציאָנעלע גרייסנ און וועלנ רעכענענ, אז, ווענ איינע פונ זיי איז גלײַכ צום איינס פונ דער דאָזיקער גרייס, וועט די צווייטע זײַנ גלײַכ צו k איינסנ (פונ דער צווייטער גרייס). ווענ מיר וועלנ איצט פאָרשטעלנ זיכ, אז די דאָזיקע גרייסנ האָבנ זיכ געענדערט, די ערשטע גרייס איז געוואָרנ גלײַכ צו x איינסנ, און די צווייטע צו y איינסנ, דאַרפ די צאָל y זיכ באַקומענ גרעסער אָדער קלענער פונ דער צאָל k אינ דער פאַרהעלטעניש, אינ וועלכער די צאָל x איז קלענער אָדער גרעסער פונ 1, ד. ה. מיט אנדערע ווערטער, אינ אזא פאַרהעלטעניש, אינ וועלכער 1 איז גרעסער אָדער קלענער פונ x. הייסט עס, מיר וועלנ האָבנ א פראָפאָרציע:

$$y : k = 1 : x,$$

פונוואַנענ

$$yx = k$$

ווענ צוויי גרייסנ זײַנענ פאַרקערט-פראָפאָרציאָנעל, דאַרפ דער קייפל־פראָדוקט פונ דער צאָליקער באַדײַטונג פונ איינער פונ זיי אפ דער אנטשפּרעכיקער צאָליקער באַדײַטונג פונ דער צווייטער זײַנ גלײַכ צו א קאָנסטאַנטער פאַר די דאָזיקע גרייסנ צאָל.

מיר וועלנ נעמענ, צום בײַשפּיל, אזעלכע צוויי פאַרקערט־פראָפאָרציאָנעלע גרייסנ: די וואָג פונ א סכוירע, וועלכע מע קענ קויפנ פאַר דער געגעבענער סומע געלט k רובל, און דעם פרײַז פונ 1 קג פונ דער דאָזיקער סכוירע. לאָמיר זאָגנ, אז דער פרײַז פונ 1 קג איז x רובל.

הייסט עס, פאַר א סומע פונ k רובל קענ מענ קויפנ די דאָזיקע סכוירע $\frac{k}{x}$ קילאָגראַם. באַצייכענענדיק די וואָג פונ דער געקויפטער סכוירע דורכ y, וועלנ מיר באַקומענ:

$$y = \frac{k}{x},$$

פונוואַנענ

$$xy = k$$

ווו k איז א קאָנסטאַנטע צאָל, נעמלעכ—די סומע געלט, פאַר וועלכער עס ווערט געקויפט די סכוירע.

פונ דער אנדער זײַט, אויב די אָפּהענגיקײַט צווישנ וועלכע עס איז פאַרענדערלעכע גרייסנ y און x ווערט אויסגעדריקט דורכ דער פאָרמולע $yx = k$, ווו k איז א קאָנסטאַנטע צאָל, זײַנענ אזעלכע גרייסנ פאַרקערט־פראָפאָרציאָנעל, ווײַל

בא דער פארגרעסערונג פונ איינעמ פונ די מיטקייפלער פונעמ קייפל־פראָדוקט yx אינ א וועלכער עס איז פארהעלטעניש דארפ דער צווייטער מיטקייפלער פארקלענערט ווערנ אינ דער זעלביקער פארהעלטעניש, קעדיי דער קייפל־פראָדוקט זאָל בלייבנ אומפארענדערט.

באמערקונג. די פאָרמולע $yx=k$ איז גלייכבאטרעפיק מיט דער פאָרמולע $y=\frac{k}{x}$, וועלכע מע קענ אויסדריקנ אזוי:

אויב צוויי גרייסנ זיינענ פארקערט־פראָפּאָרציאָנעל, איז די צאָליקע באדייטונג פונ איינער פונ זיי גלייכ צו א געוויסער שטענדיקער גרייס, געטיילט אפ דער אנטשפרעכיקער באדייטונג פונ דער צווייטער גרייס.

געניטונגענ.

57. אינ וואָס פאר אנ אָפּהענגיקייט געפינענ זיכ בא גלייכמעסיקער באוועגונג:

א) דער אָפּשטאנד, וואָס ווערט דורכגענאנגענ אינ דער געגעבענער צייט, אונ די גיכקייט פונ דער באוועגונג;

ב) די צייט, וואָס אינ מעשעכ פונ איר ווערט דורכגעגאנגענ דער געגעבענער אָפּשטאנד, אונ די גיכקייט פונ דער באוועגונג;

ג) דער אָפּשטאנד אונ די צייט, וואָס אינ מעשעכ פונ איר ווערט דורכגעגאנגענ דער דאָזיקער אָפּשטאנד (בא דער געגעבענער גיכקייט)?

ב א מ ע ר ק ו נ ג. די דאָזיקע אָפּהענגיקייטנ קאָנ מענ לייכט איינזענ פונ דער פאָרמולע וועגנ גלייכמעסיקער באוועגונג: $s=vt$, ווו s איז דער אָפּשטאנד, v—די גיכקייט פונ דער באוועגונג אונ t—די צייט, וואָס אינ מעשעכ פונ איר איז דורכגעגאנגענ געוואָרנ דער אָפּשטאנד.

58. אינ וואָס פאר א אָפּהענגיקייט געפינענ זיכ:

א) דער שעטעכ פונ א גראָדעק אונ זיינ באזיס (בא אנ אומפארענדערלעכער הייכ);

ב) דער שעטעכ אונ די הייכ (בא אנ אומפארענדערלעכנ באזיס);

ג) דער באזיס אונ די הייכ (בא אנ אומפארענדערלעכנ שעטעכ)?

ב א מ ע ר ק ו נ ג. די דאָזיקע אָפּהענגיקייט קאָנ מענ ארויסטפירנ פונ דער פאָרמולע, וואָס באשטימט דעמ שעטעכ פונ א גראָדעק: $p=bh$, ווו p איז דער שעטעכ, b—דער באזיס אונ h—די הייכ.

59. צי וועלנ זיינ פראָפּאָרציאָנעל איינע צו דער אנדערער די פאָלגנדיקע פארנ אומפארענדערלעכע גרייסנ:

א) דער בויגנ פונ א קרייזליניע אונ דער צענטראלער ווינקל, וואָס שטיצט זיכ אפ אימ;

ב) די כאָרדע אונ דער צענטראלער ווינקל, וואָס שטיצט זיכ אפ איר;

ג) די לענג פונ דער קרייזליניע אונ איר ראדיוס;

ד) דער שעטעכ פונ א קוואדראט אונ זיינ זייט;

ה) דער שעטעכ פונ א קרייז אונ זיינ ראדיוס?

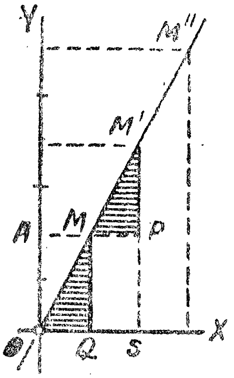
33. גראפיק פונ גלייכ־פראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקייט. אינ דער פראקטיק ווערט די פראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקייט באטראכט מערסטנטייל צווישנ גרייסנ פאָזיטיווע; דעריבער וועלנ מיר זיכ פאָרשטעלנ, אז אינ דער פאָרמולע $y=kx$ זיינענ אלע דריי צאָלנ פאָזיטיווע.

זאָל זיך פּאָדערן צו שילדערן גראַפיש די פונקציע: $y = 2x$. צוליב דעם לאָמיר אַפריער צונויפשטעלן אַ טאַבעלע פון אירע באַדײַטונגען, צום בײַשפּיל אַזאַ:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	......
y	0	2	4	6	8	10	12	14	......

אין דער אויבערשטער רײ האָבן מיר אוועקגעשטעלט פאַרשיידענע באַדײַטונגען פונעם אַרגומענט x, און אין דער אונטערשטער האָבן מיר אויסגעשריבן די אַנטשפּרעכיקע באַדײַטונגען פון y.

איצטער, אַז מיר וועלן אָנצייכענען די קאָאָרדינאַט־אַקסן און וועלן אויסקלײַבן אַן איינס פון לענג (אַשטייגער OQ, צייכ. 5), לאָמיר קאָנסטרויִרן די פונקטן O, M, M', M'',..., וואָס די קאָאָרדינאַטן זייערע זײַנען די באַדײַטונגען x און y, וועלכע זײַנען אוועקגעשטעלט אין אונדזער טאַבעלע. אַזוי וועט O זײַן אַ פונקט, וואָס האָט די קאָאָרדינאַטן $x = O$, $y = O$, דער פונקט M האָט די קאָאָרדינאַטן $x = 1$, $y = 2$ א. א. וו. וויפל אַזעלכע פונקטן מיר זאָלן ניט קאָנסטרויִרן, דאַרפן זיי אַלע ליגן אויף איינער און דער זעלביקער גראָדער ליניע. כדי צו דערווײַזן דאָס, לאָמיר נעמען וואָסערע ניט איז דרײַ שכיינישע פונקטן, צום בײַשפּיל O, M און M', און נאָכן פאַרבינדן דורך גראָדע ליניעס דעם פונקט O מיט M און נאָכדעם דעם פונקט M מיט M', לאָמיר באַווײַזן, אַז די גראָדע MM' איז אַ פּאָרזעצונג פון דער גראָדער OM. צוליב דעם דאָזיקן צוועק לאָמיר דורכפירן MP (די פּאָרזעצונג פון MR) און לאָמיר פאַרגלײַכן צווישן זיך צוויי גראָדווינקלדיקע דרײַעקן (פאַרשטריכירטע). בײַ זיי איז $OQ = MP = 1$ און $MQ = M'P = 2$, און דעריבער זײַנען די דרײַעקן גלײַך, און, אַזוי אַרום, איז $\angle M'MP = \angle MOQ$; דעריבער שטעלט פאָר די גראָדע MM' אַ פּאָרזעצונג פון דער גראָדער OM. הייסט עס, אַז די דרײַ פונקטן O, M און M' ליגן אויף איין גראָדער. אַלץ, וואָס איז געזאָגט געוואָרן וועגן די דאָזיקע דרײַ פונקטן, קען איבערגעחזרט ווערן וועגן יעטווידער אַנדערע דרײַ שכיינישע פונקטן; הייסט עס, אַז אַלע פונקטן דאַרפן ליגן אויף איין גראָדער. אַזוי אַרום, איז:



צייכ. 5.

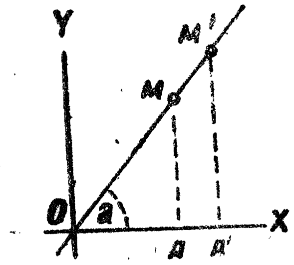
די גראַפיק פון גלײַך־פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקייט ($y = kx$) איז די גראָדע, וועלכע גייט דורך דורכן אָנהייב פון די קאָאָרדינאַטן און דורכן פונקט (M), וואָס זײַן אַבסציסע איז 1, און די אָרדינאַטע איז גלײַך צו דעם קאָעפיציענט פון פּראָפּאָרציאָנעלקייט (אין אונדזער בײַשפּיל איז זי גלײַך צו 2).

34. ענדערונג אינ דער לאַגע פונ דער גראַדער, אָפּהענגיק פונ דעם, ווי עס ענדערט זיכ דער קאָעפיציענט פונ פּראָפּאָרציאָנעלקייט.

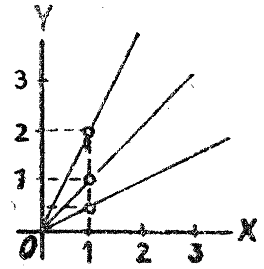
לאָמיר נאָכ קאָנסטרויִרנ אַפ איינער אונ דער זעלביקער צייכענונג (6) גראַדע, וועלכע דריקנ אויס די פונקציעס:

$$y=\frac{1}{2}x;\quad y=x;\quad y=2x,$$

וואָס די קאָעפיציענטנ זיינענ בא זיי פּאָזיטיווע אונ דערביי האַלטנ זיי אינ וואַקסנ. פונ דער צייכענונג זעענ מיר, אַז אָפּהענגיק פונ דעם, ווי עס וואַקסט דער קאָעפיציענט פונ פּראָפּאָרציאָנעלקייט, נייגט זיכ אָפּ די גראַדע אַלצ מער אונ מער פונ דער x-אַקס אונ דערנעענטערט זיכ צו דער y־אַקס. אַפּ אַזא אופנ כאַראַקטעריזירט דער קאָעפיציענט k אינ דער פונקציע $y=kx$ דעם



צייכ. 7.



צייכ. 6.

ווינקל, וואָס איז געבילדעט פונ דער גראַדער מיט דער האַלב־אַקס OX; דעריבער רופט זיכ אָנ די צאָל k אויכ דער ווינקל־קאָעפיציענט פונ דער גראַדער, וואָס דריקט אויס גראַפיש די פונקציע $y=kx$. אזוי ווי פונ דער דאָזיקער פונקציע איז צו זענ, אַז $k=\frac{y}{x}$ דעריבער קאָנ מענ זאָגנ, אַז דער ווינקל־קאָעפיציענט איז גלייכ צו דער פאַרהעלטעניש פונ א געוויסער באַדייטונג פונ דער פונקציע (פונ א געוויסער אָרדינאַטע) צו דער אַנטשפּרעכיקער באַדייטונג פונעמ אַרגומענט (צו דער אַנטשפּרעכיקער אַבסציסע), אַזוי אַז, אויב די פונקציע ווערט געשילדערט דורכ דער גראַדער OM (צייכ. 7), איז

$$k=\frac{MA}{OA}=\frac{M'A'}{OA'}=\ldots=tg\alpha$$

(ווי עס איז באַוווּסט פונ טריגאָנאָמעטריע, איז די פאַרהעלטעניש פונ איינ קאַטעט צומ צווייטנ קאַטעט גלייכ צומ טאַנגענס פונעמ ווינקל α, וואָס ליגט אַנטקעגנ דעם ערשטנ קאַטעט).

ס'איז נוצלעכ צו באַמערקנ, אַז אויב $k=1$, ד. ה., אויב די פונקציע האָט דעם אויסזעג: $y=x$, איז די גראַדע, וואָס שילדערט זי, א ביסעקטריסע פונעמ גראַדנ ווינקל XOY (דעמלט איז דער דרייעק OAM א גלייכאַקסלדיקער אונ $\angle\alpha=45°$). אויב $k=0$, ד. ה. אויב די פונקציע האָט דעם אויסזעג $y=0$, גיסט זיכ די גראַדע צונויפ מיט דער אַקס OX.

35. גראַפיק פונ פּארקערטער פּראָפּאָרציאָנעלקײַט.

אוא פּראָפּאָרציאָנעלקײַט דריקט זיכ אויס, ווי מיר האָבנ געזעג, דורכ דער פאָרמולע:

$$xy = k$$

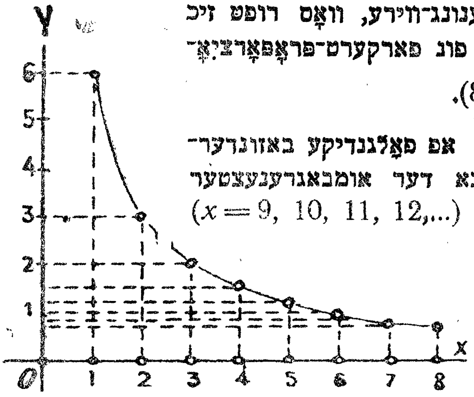
$$y = \frac{k}{x} \text{ אָדער}$$

לאָמיר קאָנסטרויִרנ א גראַפיק פונ אנ אײנצלנעם פאל, ווענ $k = 6$, ד. ה., ווענ די פונקציע וועט זײַנ $y = \frac{6}{x}$.

לאָמיר צונויפשטעלנ א טאבעלע פאר די באדײַטונגענ פונ דער דאָזיקער פונקציע, צום בײַשפּיל אזא:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	...

אז מיר וועלנ ארופטראָגנ די באדײַטונגענ, וואָס זײַנען אָנגעוויזנ אפ דער טאבעלע, אפ דער צײכענונג אונ וועלנ ארומפירנ אלע פונקטנ, וואָס האָבנ זיכ באקומענ אפ דער גראַפיק, מיט א קרומער (פונ האנט אָדער מיט דער הילפ פונ א ספּעציעלער צײכענונג־ווירע, וואָס רופט זיכ לעקאל), וועלנ מיר באקומענ א גראַפיק פונ פּארקערט־פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקײַט $y = \frac{6}{x}$ (צײכ. 8).

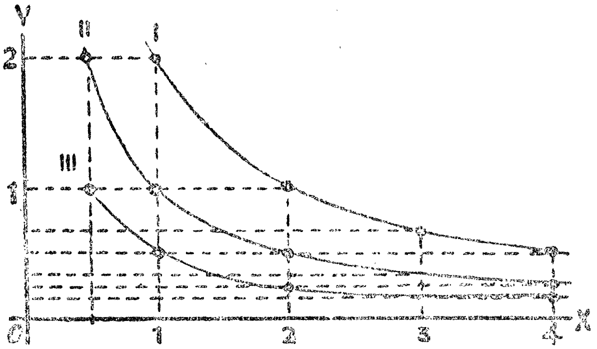


צײכ. 8.

לאָמיר ווענדנ די אופמערקזאמקײַט אפ פאָלגנדיקע באזונדערקײַטנ פונ דער דאָזיקער גראַפיק: בא דער אומבאגרענעצטער פּארגרעסערונג פונ דער אבסציסע x $(x = 9, 10, 11, 12,...)$ האלט די אָרדינאטע פונ דער קרומער אינ אײנ פּארקלענערנ זיכ, דערנעענטערנדיק זיכ צו נול, אזוי, אז די קרומע, אינ גאנג פונ דעמ, ווי מיר זעענ זי פאָר אפ רעכטס, נײגט זי זיכ אלצ נעענטער אונ נעענטער צו דער x־אקס, נאָר זי קאָנ זי קײנמאָל נית דערגרײכנ (די ברוכצאָל $\frac{6}{x}$ קאָנ קײנמאָל נית ווערנ גלײַכ צו נול). אפ דעמ זעלביקנ אויפנ קומט אויס, אז, אויב מיר וועלנ פארנ x נעמענ די ברוכצאָלנ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ א. א. וו., וואָס דערנעענטערנ זיכ אלצ צו נול, וועט y אלצ מער אונ מער וואקסנ $(y = 12, 24, 48,...)$, אזוי, אז די צווײַג פונ דער קרומער, באמ פאָרזעצנ זי אפ לינקס, הײבט זיכ אומבאגרענעצט ארופ, דערנעענטערנדיק זיכ אינ דער זעלביקער

צײַט אַלץ מער און מער צו דער y־אַקס, אָבער דערגרייכן זי קאָן זי קיינמאָל ניט (בײַ $x = 0$ הערט אויף די ברוכצאָל $\frac{6}{x}$ צו עקזיסטירן).

די צייכענונג 9, וואָס איז געמאַכט געוואָרן אין גרעסערע איינסן, איידער די פֿאָריקע, שטעלט מיט זיך פֿאָר דרײַ גראַפֿיקעס פֿון דער פֿונקציע $y = \frac{k}{x}$ בײַ $k = 2;\ 1;\ \frac{1}{2}$. זיי האָבן די זעלביקע באַזונדערקייטן, ווי די גראַפֿיק פֿון דער פֿאָריקער צייכענונג, און שיידן זיך אונטער איינע פֿון דער אַנדערער בלויז מיט אַ גרעסער אָדער קלענערער אַרײַנגעקוועטשטקייט צום שפּיץ פֿונעם גראָדן ווינקל. בכלל, איז די גראַפֿיק פֿון דער פֿונקציע $y = \frac{k}{x}$ די אַזוי גערופֿענע היפּערבאָלע.



צייכ. 9.

מיר וועלן באַמערקן, אַז אויף אַזעלכע צייכענונגען איז באַקוועמער פֿון אַלץ צו נעמען דאָס אַזוי גערופֿענע קאַנוועאַרטיקע (גנעצאַרטיקע) פּאַפּיר, וואָס איז דורך גלײַכמאָסיק דערווײַטערטע האָריזאָנטאַלע און ווערטיקאַלע גראָדע ליניעס צעטיילט אויף קליינע קוואַדראַטלעך (צום בײַשפּיל, אויף קוואַדראַטע מילימעטערס; דעמלט רופֿט זיך דאָס פּאַפּיר מילימעטער־פּאַפּיר). די גראָדע OX און OY דאַרף מען נעמען אויף דעם דאָזיקן פּאַפּיר אַזוי, אַז זיי זאָלן צונויפֿפֿאַלן מיט זײַנע וואָסערע עס איז גראָדע. פֿאַר אַן איינס פֿון לענג נעמט מען דעמלט איינע אָדער עטלעכע טיילונגען פֿונעם פּאַפּיר (צום בײַשפּיל, אויף מילימעטערדיקן פּאַפּיר — אַ מילימעטער אָדער אַ סאַנטימעטער).

געניטונגען.

61. האַלטנדיק די גיכקייט v פֿון אַ גלײַכמעסיקער באַוועגונג פֿאַר אַן אומפֿאַרענדערלעכער, אויסדריקן גראַפֿיש די שטרעקע S, [ווי אַ פֿונקציע פֿון דער צײַט t (געטלעכ: $S = vt$), אָנעמענדיק t פֿאַר אַ פֿאַרענדערלעכער אַבסציסע און S—פֿאַר אַ פֿאַרענדערלעכער אָרדינאַטע.

62. בײַם פֿרײַעם פֿאַלן פֿונעם קערפּער קאָן די גיכקייט v, וואָס באַדײַט די צאָל מעטער אין אַ סעקונדע, אויסגעדריקט ווערן דורך דער פֿאָרמולע: $v = gt$, ווו t באַדײַט די צאָל סעקונדעס, וואָס איז דורכגעגאַנגען פֿונעם אָנהייב פֿאַלן, און g איז די פֿאַרגיכערונג בײַם פֿאַלן, וועלכע איז גלײַך צו 9,8 מ אין אַ סעקונדע.

דריקט אויס גראַפֿיש v, ווי די פֿונקציע פֿון דער צײַט t (נעמענדיק אַ סאַנטימעטער פֿאַר אַן איינס פֿון דער אַבסציסע t און אַ מילימעטער פֿאַר אַן איינס פֿון דער אָרדינאַטע v).

62. קאָנסטרוירט אויף אַ צייכענונג גראַפֿיקעס פֿון די פֿונקציעס:

$$y = \frac{1}{3}x;\quad y = x;\quad y = 3x.$$

63. קאָנסטרויִרט גראַפיקעס פון די פונקציעס:

$$y=\frac{4}{x};\quad y=\frac{\frac{1}{3}}{x}.$$

64. קאָנסטרויִרט אַ גראַפיק פון דער פונקציע $\frac{2,1}{y}=y$, צונעבנדיק דעם x די באַטײַטונגען: 5; 4; 3; 2; 1; 0; 0,7; 0,5; 0,4 און די זעלביקע נעגאַטיווע באַטײַטונגען (פאַר אַן אײנס נעמט אַ סאַנטימעטער). לויט דער אָנגעצייכנטער גראַפיק באַשטימט די גרייס y, אויב: 1) $x=-2,2$ און 2) $x=3,4$.

III. לינעאַרע פונקציע.

36. צוויי בײַשפּילן פון דער ערשטער מאָדריגע. אויפגאַבע. די לענג פון אַן אײַזערנעם שטאַנג בײַ דער טעמפּעראַטור $0°$ באַטרעפט 1 מ; באַשטימט, וואָס פאַר אַ לענג l וועט זיך אַרויסווײַזן בײַ דעם דאָזיקן שטאַנג, ווען ער וועט אָנגעוואַרעמט ווערן ביז $t°$, אויב עס איז באַוווּסט, אַז מיט יעדער גראַד אָנוואַרעמונג פאַרגרעסערט זיך די לענג פונעם שטאַנג אויף 0,000012 פון יענער לענג, וועלכע דער שטאַנג האָט בײַ $0°$.

בײַם אָנוואַרעמען אויף $1°$ דאַרף די לענג פונעם שטאַנג, וואָס איז גלײַך בײַ $0°$ צו איין מעטער ($=100$ סמ), פאַרגרעסערן זיך אויף 0,000012 סמ, געקייפּלט אויף 100, ד. ה. אויף 0,0012 סמ. די פאַרלענגערונג בײַם אָנוואַרעמען אויף $t°$ דאַרף זײַן אין t מאָל מער, איידער בײַם אָנוואַרעמען אויף $1°$; דעריבער וועט די גאַנצע פאַרלענגערונג זײַן $0,0012t$ סמ. אַז מיר וועלן צולייגן צו דער דאָזיקער פאַרלענגערונג די אָנפאַנגלעכע לענג פונעם שטאַנג (בײַ $0°$), ד. ה. 100 סמ, וועלן מיר באַקומען:

$$l=(\text{סמ})\ 0,0012t+100$$

ס'איז ניט שווער צו זען, אַז דאָס איז די זעלביקע פאָרמולע, וועלכע מיר האָבן באַקומען שוין פריִער; אָבער די לענג l איז איצט אויסגעדריקט ניט אין מעטערס, נאָר אין סאַנטימעטער.

אויב מיר זאָלן די טעמפּעראַטור t, ביז וועלכער עס איז אָנגעוואַרעמט דער שטאַנג, באַטראַכטן ווי אַ פאַרענדערלעך־אומאָפּהענגיקע צאָל, קאָנען מיר די לענג l באַטראַכטן ווי די פונקציע פון דער טעמפּעראַטור. באַצייכענענדיק לויטן אַלגעמיינעם אָנגענומענעם דאָס פאַרענדערלעך־אומאָפּהענגיקע מיטן בוכשטאַב x, און די פונקציע מיטן בוכשטאַב y, קאָנען מיר די אָפּהענגיקייט צווישן דער לענג פונעם שטאַנג און זײַן טעמפּעראַטור אויסדריקן דורך אַזאַ פאָרמולע:

$$y=0,0012x+100$$

אָדער אין אַ מער אַלגעמיינעם אויסזען:

$$y=ax+b,$$

אויב מיר וועלן מיט די בוכשטאַבן a און b באַצייכענען די קאָנסטאַנטע צאָלן, וואָס גייען אַרײַן אין אונדזער פאָרמולע.

אנ אלגעבראישער אויסדרוק פונעם אויסזענ $ax+b$, אינ וועלכנ a אונ b זיינענ וואָסערע ניט איז קאָנסטאנטע צאָלנ, אונ x איז א פארענדערלעכ - אומאָפּ־הענגיקע צאָל, רופט זיכ צווייגליד פונ דער ערשטער מאדרייגע (אינ באצוג צו x). אזוינע פונקציעס באגעגענענ זיכ באם לייזנ אסאכ אופגאבעס אונ פראגעס.

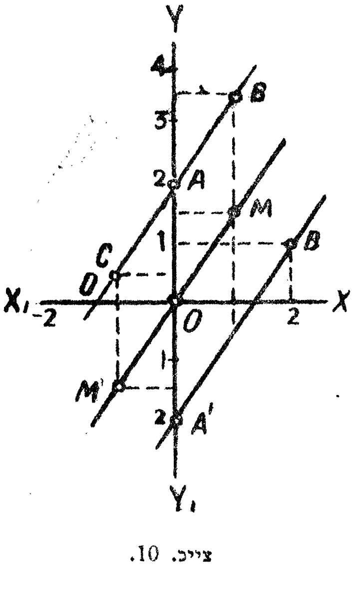
דער וואָרצל פונעם צווייגליד רופט זיכ יענע באדייטונג פונעם ארגומענט x, באַ וועלכער דער צווייגליד פארוואנדלט זיכ אינ נול. קעדיי צו געפינענ אזא באדיי־טונג, דארפ מענ צוגלייכנ דעם צווייגליד צו נול אונ לייזנ די באקומענע גלייכונג. אפ אזא אופנ וועט זיכ דער וואָרצל פונעם צווייגליד $1\frac{1}{2}x+2$ באקומענ, אויב מיר וועלנ לייזנ די גלייכונג $1\frac{1}{2}x+2=0$.

$$1\frac{1}{2}x=-2;\quad x=-2:\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}.$$

37. גראפיק פונ א צווייגליד פונ דער ערשטער מאדרייגע.

לאָמיר נעמענ א וואָסערנ ניט איז איינצלנעם פאל פונ א צווייגליד, צום ביישפיל אזא:

$$y=1\frac{1}{2}x+2.$$



צייכ. 10.

לאָמיר דערווייל אָפּוואַרפנ די צאָל 2 אונ לאָמיר נעמענ א מער פּאָשעטע פונקציע: $y=1\frac{1}{2}x$. די דאָזיקע פונקציע דריקט אויס די פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקייט צווישנ y אונ x אונ דעריבער וועט זי זיכ גראפיש אויסדריקנ, ווי מיר וויסנ, דורכ א גראָדער (צייכ. 10), וואָס גייט דורכנ אָנהייב פונ די קאָאָרדינאטנ אונ דורכנ פונקט M, בא וועלכנ די אבסציסע איז 1, אונ די אָרדינאטע איז $1\frac{1}{2}$.

אויב מיר וועלנ דעם ארגומענט x געבנ ניט בלויז פּאָזיטיווע באדייטונגענ, נאָר אויכ נעגא־טיווע, וועט זיכ די דאָזיקע גראָדע פאָרזעצנ אראָפּצו אונ וועט דורכגיינ דורכנ פונקט M', וואָס זיינ אבסציסע איז -1 אונ די אָרדי־נאטע $-1\frac{1}{2}$. אויב מיר וועלנ איצטער אופשטעלנ די פריִער אָפּגעוואָרפענע צאָל $+2$, ד. ה., מיר וועלנ נעמענ די פונקציע $y=1\frac{1}{2}x+2$, וועלנ מיר דערזענ, אז אלע אָרדינאטעס פונ דער דאָזיקער פונקציע וועלנ זיינ גרעסער איידער די אנטשפּרע־כיקע אָרדינאטעס פונ דער פונקציע $y=1\frac{1}{2}x$ אפּ 2 איינטנ. הייסט עס, אז די גראפיק

פונ דער פונקציע $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ וועלנ מיר באקומענ פונ דער גראפיק פונ דער פונקציע $y = 1\frac{1}{2}x$, אויב מיר וועלנ די גראָדע ליניע MM' אריבערטראָגנ פאראלעל צו זיכ אליינ ארופצו אפ 2 איינסנ. צוליב דעמ לאָמיר אָפלייגנ אפ דער אקס OY דעמ אָפשניט $OA = 2$ אונ דורכנ פונקט A לאָמיר דורכפירנ א גראָדע, א פאראלעלע צו MM'. די דאָזיקע גראָדע וועט דאָס דינענ ווי א גראַפיק פונ דער פונקציע $y = 1\frac{1}{2}x = 2$. די אבסציסע OD פונעמ פונקט, אינ וועלכנ די דאָזיקע גראָדע שנײַדט זיכ איבער מיט דער x-אקס, איז גלײַכ צומ וואָרצל פונעמ צווייגליד, ווײַל בא דער דאָזיקער אבסציסע איז די אָרדינאטע y (ד. ה. די גרייס פונעמ עצעמ צווייגליד) גלײַכ צו נול (אפ אונדזער צייכענונג איז $OD = -1\frac{1}{3}$).

אויב מיר וועלנ נעמענ די פונקציע

$$y = \frac{1}{2}x - 2,$$

דארפ מענ דעמ אָפשניט OA אָפלייגנ אראָפצו פונעמ פונקט O, ווײַל דעמלט וואָלט אויסקומענ אלע אָרדינאטעס פונ דער פונקציע $y = 1\frac{1}{2}$ צו פארקלענערנ אפ 2 איינסנ. מיר וועלנ באקומענ דעמלט א גראָדע $A'B'$, וואָס איז פאראלעל צו MM' אונ האקט אָפ פונ דער y-אקס דעמ אָפשניט $OA' = -2$. דער וואָרצל פונ דעמדאָזיקנ צווייגליד איז גלײַכ צו דער אבסציסע פונעמ פונקט, אינ וועלכנ די גראָדע $A'B'$ שנײַדט זיכ איבער מיט דער x-אקס (אפ דער צייכענונג איז די דאָזיקע אבסציסע $= +1\frac{1}{3}$).

אויב אינ דער פונקציע $y = ax + b$ וועט דער קאָעפיציענט a זײַנ א צאָל א נעגאטיווע (צומ בײַשפיל $y = -1\frac{1}{2}x + 2$), וועט די אנטשפרעכיקע גראָדע, וואָס דריקט אויס די גראפיק פונ דער פונקציע $y = -\frac{1}{2}x$, דורכגיינ דורכ די ווינקלענ $X'OY$ אונ XOY', אונ אנטשפרעכיק דערצו וועט זיכ ענדערנ אויכ די ריכטונג פונ דער גראָדער BC. אפ אזא אופנ איז:

די גראפיק פונ צווייגליד $y = ax + b$ — איז א גראָדע ליניע, וואָס איז פאראלעל צו דער גראָדער, וועלכע דריקט אויס די פונקציע $y = ax$ אונ וואָס האקט אָפ פונ דער y-אקס אנ אָפשניט, וועלכער איז גלײַכ צו b.

מאכמעס דעמ, וואָס די גראפיק פונ דער פונקציע $y = ax + b$ איז א גראָדע ליניע, רופט זיכ די דאָזיקע פונקציע גופע א לינעאלע.

צוליב קורצקײַט איז אפ ווײַטער, אָנשטאָט צו זאָגנ: „די גראָדע, וואָס דריקט אויס די פונקציעס $y = ax + b$“, וועלנ מיר זאָגנ קירצער: „די גראָדע $y = ax + b$“.

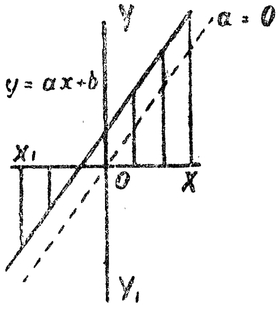
דער ווינקל, וואָס ווערט געבילדעט דורך דער גראָדער $y = ax + b$ מיט דער x־אַקס, איז גלייַך, פאַרשטייט זיך, צום ווינקל, וואָס ווערט געבילדעט מיט דער x־אַקס דורך דער גראָדער $y = ax$; הייסט עס, אַז דער דאָזיקער ווינקל הענגט אָפּ בלויז פון דער גרייס פונעם קאָעפיציענט a, און דעריבער רופט זיך דער דאָזיקער קאָעפיציענט אויך אין דער אַלגעמיינער פאָרם פונעם צווייגליד $ax + b$ ווינקל־דיקער.

די צאָל b אינעם צווייגליד $ax + b$ איז די אַזוי־גערופענע אָנפאַנגלעכע אָרדינאַטע, וואָס אַנטשפּרעכט דער אָנפאַנגלעכער באַדייַטונג $x = 0$; זי שטעלט מיט זיך פאָר אַן אָפּשניט פון דער y־אַקס, אַן אָפּגעהאַקטער דורך דער גראָדער, וואָס דריקט אויס דעם צווייגליד.

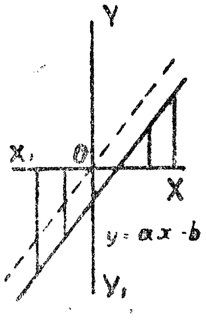
דער קאָעפיציענט a, ווי מיר האָבן געזען (§ 37), איז גלייַך צום טאַנגענס פונעם ווינקל, וואָס איז געבילדעט מיט דער פּאָזיטיווער ריכטונג פון דער x־אַקס דורך דער גראָדער $y = ax$ (און הייסט עס, אויך דורך דער גראָדער $y = ax + b$, וואָס איז פּאַראַלעל צו איר).

38. ענדערונג פונעם צווייגליד $y = ax + b$ בא דער ענדערונג פונעם x.

די גראָדע $y = ax$, וואָס פּאַראַלעל צו איר ווערט דורכגעפירט די גראָדע $y = ax + b$, גייט דורך דורך די ווינקלען XOY און X_1OY_1, אויב $a > 0$, און דורך די ווינקלען X_1OY און XOY_1, אויב $a < 0$.



צייכ. 12.



צייכ. 11.

הייסט עס, אַז אינעם ערשטן פאַל הייבט זיך די גראָדע $y = ax + b$ אַרויפצו (צייכ. 11 און 12), און אינעם צווייטן פאַל לאָזט זי זיך אַראָפּצו (אויב מע זאָל זי באַטראַכטן אין דער ריכטונג פון לינקס אויף רעכטס).

אויב מיר וועלן נעמען אין באַטראַכט, אַז נעגאַטיווע צאָלן זייַנען אַלץ גרעסער, וואָס קלענער עס זייַנען זייערע אַבסאָלוטע גרייסן, איז קענען מיר זאָגן (צייכ. 12), אַז דאָס דאָזיקע אָנוואַקסן אָדער אָפּקומען איז אומבאַגרענעצט און דערבייַ גלייַכמעסיק, ד. ה., אַז x פאַרגרעסערט זיך אויף איינער און דער זעלביקער צאָל, וואַקסט אָן אָדער קומט אָפּ די פונקציע אויך אויף איינער און דער זעלביקער צאָל.

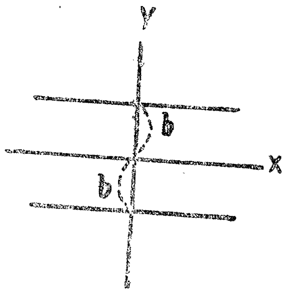
39. באַמערקונגען.

1. אויב דער ווינקלדיקער קאָעפיציענט a איז גלייַך צו נול, פאַרוואַנדלט זיך דעמלט דער צווייגליד אין אַן איינגליד $y = b$. דאָס באַטייַט, אַז אין דער גראַפישער שילדערונג דאַרף זיך באַקומען אַזאַ גראָדע, בא וועלכער אַלע פונקטן האָבן איינע און די זעלביקע אָרדינאַטע, וואָס איז גלייַך צו b, און די אַבסציסע קאָן זייַן אַ וואָסערע מע וויל. קלאָר, אַז אַזאַ ליניע איז די גראָדע, וואָס איז פּאַראַלעל צו דער x־אַקס און האַקט אָפּ פון דעם y־אַקס אַן אָפּשניט, וועלכער

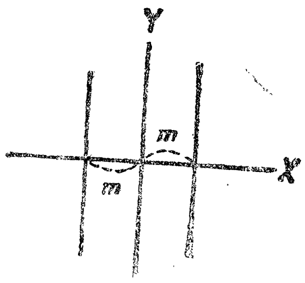
איז גלײַכ צו b. הײסט עס, בא b א פאָזיטיװנ װעט זיכ די דאָזיקע גראָדע אויסלײגנ איבער דער x־אַקס, אונ בא b א נעגאַטיװנ — אונטער איר (צײכ. 13); סײַ אינ דעם, סײַ אינ יענעמ פאַל בלײַבט בא דער ענדערונג פונעמ x די פונקציע א קאָנסטאַנטע (גלײַכ צו b).

אינ דעמ פאַל, װענ בא $a=0$ װעט נאָכ אויכ $b=0$, ד. ה., אויב די לינעאַלע פונקציע װעט זײַנ $y=0$, װעט די גראַפיק פונ דער פונקציע זײַנ די x-אַקס (פאַר יעדער פונקט פונ דער דאָזיקער אַקס איז די אָרדינאַטע $y=0$, אונ די אַבסציסע איז א באַליביקע).

2. אויב א װאָסערע ניט איז גראָדע איז פאַראַלעל צו דער y־אַקס (צײכ. 14), קענענ דעמלט די אָרדינאַטעס פונ די פונקטנ בא דער דאָזיקער גראָדער האָבנ באַליביקע באַדײַטונגענ, די אַבסציסעס זײַנענ אָבער פאַר אַלע פונקטנ די זעלביקע, נעמלעכ: זײ זײַנענ גלײַכ צו דעמ פאָזיטיװנ אָדער נעגאַטיװנ אָפּשניט m, װאָס אימ האַקט אָפּ די גראָדע פונ דער x־אַקס. הײסט עס, אַז אַזא גראָדע קאָנ מענ אויסדריקנ דורכ א גלײַכונג אַזוי: $x=m$ (די אָרדינאַטע y, װאָס גײט ניט אַרײַנ אינ דער גלײַכונג, בלײַבט א באַליביקע). אינ דעמ פאַל, װענ $m=0$, באַקומט זיכ די גלײַכונג $x=0$, װעלכע דריקט אויס, אַז די אַבסציסע פונ יעטװידער פונקט איז 0, אונ די אָרדינאַטע איז א װאָסערע מע װיל. אַזא גראָדע איז די y־אַקס.



צײכ. 13.



צײכ. 14.

40. קאָנסטרויִרונג פונ דער גראָדער $y=ax+b$ לויט צװײ פונקטנ.

קעדײ צו קאָנסטרויִרנ א גראָדע $y=ax+b$, װאָלט מענ געקענט אפשר קאָנסטרויִרנ א באַהילפיקע גראָדע, װאָס דריקט אויס די פונקציע $y=ax$, אונ נאָכדעמ דורכפירנ א פאַראַלעלע גראָדע, װאָס האַקט אָפּ בא דער y־אַקס דעמ אָפּשניט b. אָבער פאָשעטער איז צו קאָנסטרויִרנ א גראָדע $y=ax+b$, געפינענדיק אפשר װעלכע ניט איז צװײ פונקטנ פונ דער דאָזיקער גראָדער. לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ, צומ בײַשפיל, אַז מע דאַרפ קאָנסטרויִרנ א גראָדע:

$$y=\frac{1}{2}x-3.$$

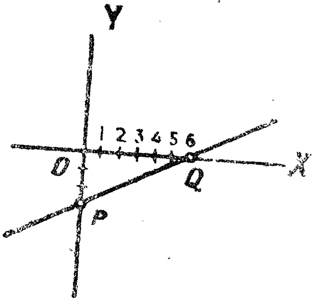
צוליב דעמ לאָמיר געפינענ די קאָאָרדינאַטנ פונ װאָסערע ניט איז צװײ פונקטנ, װעלכע געהערנ צו דער געזוכטער גראָדער, צומ בײַשפיל, די קאָאָרדינאַטנ פונ

יענע פונקטן, אין װעלכע די גראָדע שנײַדט זיך איבער מיט די אַקסן פון די קאָאָר־דינאַטן. קעדיי צו געפינען זיי, לאָמיר אָננעמען אין דער געגעבענער גלײַכונג, אַז $x=0$ און לאָמיר באַשטימען די אַנטשפּרעכיקע באַדײַטונג פונעם y, און נאָכדעם לאָמיר אָננעמען, אַז $y=0$ און באַשטימען דעם x; דעמלט װעלן מיר געפינען:

1) אויב $x=0$, איז $y=-3$;

2) אויב $y=0$, איז $\frac{1}{2}x-3=0$ און $x=6$.

דער פונקט מיט דער אַבסציסע 0 און דער אָרדינאַטע -3 איז דער פונקט P (צייכ. 15), דער פונקט מיט דער אַבסציסע 6 און אָרדינאַטע 0 איז Q; הייסט עס, אַז די געזוכטע גראַפיק װעט זײַן די גראָדע PQ, װאָס גייט דורך די דאָזיקע צװיי פונקטן.



צייכ. 15.

אויב די איבערשנײַד־פונקטן מיט די קאָאָרדינאַט־אַקסן (אָדער איינער פון זיי) שטעלן זיך ניט אויס אין די גרענעצן פון דער צייכענונג, קאָן מען אויסזוכן אַנדערע פונקטן, װאָס זאָלן זיך יאָ אויסשטעלן אויף דער צייכענונג [1]).

געניטונגען:

65. אויב x איז די צאָל גראַדן, װאָס עס באַװײַזט צעלסיס טערמאָמעטער, און y איז די צאָל גראַדן, װאָס עס באַװײַזט בײַ די זעלביקע טעמפּעראַטור־באַדינגונגען פֿאַרענהייטס טערמאָמעטער, קאָן די פֿאַרהעלטעניש צװישן די דאָזיקע צאָלן אויסגעדריקט װערן דורך אַזאַ פֿאָרמולע:

$$y=\frac{9}{5}x+32.$$

קאָנסטרויִרט אַ גראַפֿיק פון דעם דאָזיקן צװייגליד, אָננעמענדיק x פֿאַר דער אַבסציסע און y פֿאַר דער אָרדינאַטע (פֿאַר אַן איינס פון די אַבסציסעס קאָן מען אָננעמען אַ סאַנטימעטער אָדער אַ האַלבן סאַנטימעטער און פֿאַר אַן איינס פון די אָרדינאַטעס 1 מם).

66. יעדער רובל פונעם קאַפּיטאַל, װאָס איז אָפּגעגעבן אויף $p\%$, טראָגט אַרײַן אין אַ יאָר האַכנאָסע $\frac{p}{100}$ רובל, און אין x יאָר באַטרעפֿט די האַכנאָסע $\frac{p}{100}\cdot x$ (רובל); אַזוי אַרום װעט זיך אין x יאָר יעטװידער רובל פֿאַרװאַנדלען (אויב די פּראָצענטן רעכענען זיך צו צום קאַפּיטאַל) אין $1+\frac{p}{100}\cdot x$ (רובל). אויף אַזאַ אויפֿן, באַצייכענענדיק מיטן בוכשטאַב y די גרייס פונעם אָנגעװאַקסענעם רובל, קאָנען מיר אָנשרײַבן די פֿאָרמולע:

$$y=1+\frac{p}{100}x.$$

---

[1]) קעדיי צו פֿאַרקלענערן דעם גרײַז באַם צייכענען די גראָדע, איז געװונטשן, אַז די צװיי פונקטן, דורך װעלכע עס װערט דורכגעפֿירט די גראָדע, זאָלן זײַן איינער פונעם אַנדערן װי װײַט מעגלעך מער דערװײַטערט; דעמלט װעט אַ געװיסע אומפּינקטלעכקײַט אין דער לאַגע פון דער װירע (אויסמײַדן דאָס איז זייער שװער) װייניקער אָפּרופֿן זיך אויף דער ריכטונג פון דער ליניע, װאָס װערט דורכגעפֿירט.

קאָנסטרויִרט די גראַפיק פון דעם דאָזיקן צוויייגליד, אָנעמענדיק $p = 5$ (פאַר אַ אייגס פון די אבסציסעס און אָרדינאַטעס קאָן מען נעמען 2 סמ).

קאָנסטרויִרט גראָדע, וואָס דריקן אויס די פונקציעס:

67. $y = 1 + x$; $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{2}x + 3$.

68. $y = -\frac{1}{2}x + 3$; $y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8}$; $y = 0{,}7x + 2$.

69. קאָנסטרויִרט גראָדע, וועלכע ווערן אויסגעדריקט דורך די גלייכונגען:

$$3y + x = 0;\ x + y + 5 = 0;\ 4x + 3y = 18.$$

70. קאָנטראָלירט דורך גראַפיש, צי וועלן זיך איבערשניידן אין איין פונקט די גראָדע, וואָס ווערן אויסגעדריקט דורך די גלייכונגען:

$$2x + 3y = 13;\ 5x - y = 7;\ x - 4y + 10 = 0.$$

דריטער אָפּטײל.

קוואדראטע פונקציע.

I. צוגאָב־יעדיעס וועגנ קוואדראטע גלײַכונגענ.

41. פאָרמולע פונ די וואָרצלענ בא א קוואדראטער גלײַכונג. אינ ערשטנ טײל פונעם קורס זײַנענ ארויסגעפירט געוואָרנ פאָלגנדיקע פאָרמולעס אפ באשטימענ די וואָרצלענ פונ ניט קײנ פולער אונ פונ א פולער קוואדראטער גלײַכונג:

1) $ax^2=0$; ס'איז קלאָר, אז בײדע וואָרצלענ פונ דער גלײַכונג זײַנענ גלײַך צו נול.

2) $ax^2+c=0$; די פאָרמולע פאר די וואָרצלענ וועט זײַנ:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3) $ax^2+bx=0$; דעמלט איז $x_1=0$; $x_2=-\frac{b}{a}$

4) $x^2+px+q=0$; די פאָרמולע פונ די וואָרצלענ גיט:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

אָדער

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

5) ענדלעכ, די אלגעמײנע פאָרמולע פאר די וואָרצלענ פונ א פולער קוואדראטער גלײַכונג פונ דער פאָרם $ax^2+bx+c=0$ וועט זײַנ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

די דאָזיקע פאָרמולע איז די סאמע אלגעמײנע; פונ איר, אלס אײנצלנע פאלנ, באקומענ זיכ אלע איבעריקע. אז מיר וועלנ, אשטײגער, אָנעמענ אינ דער דאָזיקער פאָרמולע $a=1$, וועלנ מיר באקומענ די פאָרמולע (4) (אינעם געגעבענעם פאל איז $b=p$ אונ $c=q$); אז מיר וועלנ אָנעמענ $c=0$, וועלנ מיר באקומענ דעמ

פאַל (3); בא $b=0$ וועלנ מיר האָבנ די פאָרמולע (2) אונ, ענדלעכ, דעם ערשטנ פאַל וועלנ מיר באַקומענ, אז מיר וועלנ געבנ, אינ דער אַלגעמיינער פאָרמולע די באַדײַטונגענ $b=c=0$.

42. **דיסקרימינאַנט.** לאָמיר באַטראַכטנ פאַרשיידענע פאַלנ, וואָס קענענ באַגעגענענ זיכ באַם לייזנ א קוואַדראַט־גלײַכונג, אָפּהענגיק פונ דער צאָל־באַדײַטונג פונ די קאָעפיציענטנ.

1. $b^2-4ac>0$. אינ דעם דאָזיקנ פאַל איז דער אויסדרוק אונטערנ ראַדיקאַל א פּאָזיטיווער. דער קוואַדראַט־וואָרצל פונ אים האָט צוויי באַדײַטונגענ אונ, פאָלגלעכ, די גלײַכונג האָט צוויי פאַרשיידענע רעאַלע וואָרצלענ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. $b^2-4ac=0$. אינ דעם פאַל איז דער צווייטער גליד פונ דעם ציילער גלײַכ צו נול, אונ די גלײַכונג האָט צוויי גלײַכע וואָרצלענ:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

3. $b^2-4ac<0$.ביידע וואָרצלענ זײַנענ שיינבאַרע.

אזוי אַרום, זעענ מיר, אז א קוואַדראַט־גלײַכונג האָט רעאַלע (פאַרשיידענע אָדער גלײַכע) אָדער שיינבאַרע וואָרצלענ אָפּהענגיק דערפונ, צי וועט דער פונ די קאָעפיציענטנ צוזאַמענגעשטעלטער אונטערראַדיקאַלער אויסדרוק b^2-4ac זײַנ מערער, גלײַכ אָדער ווייניקער פונ נול צוליב דער דאָזיקער ספּעציעלער באַדײַטונג פונ דעם אויסדרוק הייסט ער דער **דיסקרימינאַנט** פונ דער גלײַכונג.

„דיסקרימינאַנט" באַדײַט אינ איבערזעצונג **אונטערשיידער**.

43. **צוויי אייגנשאַפטנ פונ די וואָרצלענ בא א קוואַדראַטער גלײַכונג** (**וויעטאַס טעאָרעמע**). לאָמיר נעמענ די פאָרמולע פונ די וואָרצלענ בא א קוואַדראַטער גלײַכונג, בא וועלכער דער קאָעפיציענט בא x^2 איז גלײַכ צו איינס, ד. ה. בא א גלײַכונג פונ דער פאָרמ $x^2+px+q=0$;

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}; \; x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

אויב מיר וועלנ צונויפלייגנ די דאָזיקע גלײַכקײַטנ, וועלנ זיכ די ראַדיקאַלנ קעגנזײַטיק אַנולירנ, אונ מיר וועלנ באַקומענ:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

אויב מיר וועלנ אָבער די פאָרמולעס איבערקייפלענ, וועלנ מיר באַקומענ (דער קייפל־פּראָדוקט פונ דער סומע פונ צוויי צאָלנ אפ זייער דיפערענצ איז גלײַכ צו דער דיפערענצ פונ די קוואַדראַטנ פונ די דאָזיקע צאָלנ):

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2.$$

א וואָסערע עס זאָל ניט זײַן די אונטערוואָרצלאַקעלע צאָל, איז שטענדיק

$$\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

הייסט עס, אַז

$$x_1x_2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.$$

די סומע פון די וואָרצלען בײַ אַ נאָרמאַליזירטער קוואַדראַטער גלײַכונג איז גלײַך צום צווייטן קאָעפיציענט, גענומען מיט אַ פאַרקערטן צייכן, און דער קייפּל־פּראָדוקט פון די דאָזיקע וואָרצלען איז גלײַך צו דעם פרײַען גליד.

איצט וועלן מיר נעמען אַ קוואַדראַטע גלײַכונג פונעם אַלגעמיינעם אויסזען:

$$ax^2+bx+c=0.$$

צעטיילנדיק אַלע אירע גלידער אָפּ a, וועלן מיר ברענגען די דאָזיקע גלײַכונג צו דעם נאָרמאַלן באַטראַכטן אויסזען:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

הייסט עס, פאַר אַ ניט קיין נאָרמאַליזירטער פולער גלײַכונג דאַרפן מיר האָבן:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

און

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

אויספירן. 1) באַנוצנדיק זיך מיט די דאָזיקע אייגנשאַפטן, קאָנען מיר לײַכט צונויפשטעלן אַ קוואַדראַטע גלײַכונג, וואָס די וואָרצלען וועלן בײַ איר זײַן די געגעבענע צאָלן. לאָמיר, צום בײַשפּיל, דאַרפן צונויפשטעלן אַ גלײַכונג, וואָס די וואָרצלען זאָלן בײַ איר זײַן די צאָלן 2 און 3. פון די גלײַכקייטן: $2+3=-p$ און $2\cdot3=q$ באַקומען מיר דעמלט $p=-5$ און $q=6$ הייסט עס, אַז די גלײַכונג וועט זײַן: $x^2-5x+6=0$. געגליכן צו דעם וועלן מיר געפינען, אַז 3 און 7— וועלן זײַן די וואָרצלען פון דער גלײַכונג: $x^2[-3+(-7)]x+3(-7)=0$ ד. ה. $x^2+4x-21=0$; די צאָלן 3 און 0 וועלן זײַן די וואָרצלען פון דער גלײַכונג $x^2-3x=0$.

2) מיט דער הילף פון די זעלביקע אייגנשאַפטן קאָנען מיר, ניט לייזנדיק די קוואַדראַטע גלײַכונג, באַשטימען די צייכנס פון אירע וואָרצלען, אויב די דאָזיקע וואָרצלען זײַנען רעאַלע. לאָמיר, צום בײַשפּיל, האָבן די גלײַכונג $x^2+8x+12=0$. אַזוי ווי אין דעם דאָזיקן בײַשפּיל איז דער אויסדרוק $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, ד. ה., 4^2-12, אַ צאָל אַ פּאָזיטיווע, זײַנען ביידע וואָרצלען רעאַלע.

אַז מיר ווענדן די אויפמערקזאַמקייט אויפן פרײַען גליד, זעען מיר, אַז ער האָט דעם צייכן $+$; דאָס באַדײַט, אַז דער קייפּל־פּראָדוקט פון די וואָרצלען דאַרף זײַן אַ

פּאָזיטיווע צאָל, ד. ה. ביידע וואָרצלען האָבן גלײַכע צייכנס. די דאָזיקע צייכנס דאַרפֿן זײַן מינוסן, ווײַל די סומע פֿון די וואָרצלען איז א נעגאַטיווע (זי איז גלײַך צו -8). די גלײַכונג $x^2+8x-12=0$ האָט וואָרצלען מיט פֿארשיידענע צייכנס (ווײַל זייער קייפּל־פּראָדוקט איז א נעגאַטיווער), דערבײַ האָט דער נעגאַטיווער וואָרצל א גרעסערע אבסאָליוטע גרייס (ווײַל זייער סומע איז א נעגאַטיווע) א. ד. ג.

3) אזויווי די וואָרצלען פֿון דער גלײַכונג $ax^2+bx+c=0$ זײַנען די זעלביקע, וואָס די וואָרצלען פֿון דער גלײַכונג $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, איז דעריבער פֿאַר אזא גלײַכונג די סומע פֿון די וואָרצלען גלײַך צו $-\frac{b}{a}$, און זייער קייפּל־פּראָדוקט איז גלײַך צו $\frac{c}{a}$.

גענײַטונגען.

צו וואָס זײַנען גלײַך די סומע און דער קייפּל־פּראָדוקט פֿון די וואָרצלען בא יעדערער פֿון די פֿאָלגנדיקע גלײַכונגען:

71. $x^2-8x-9=0;\quad x^2-1=-x.$

71. $x^2+2=x;\quad 6-5x+3x^2=0.$

72. $\frac{1}{2}x^2=2x+1;\quad x^2-7x=0.$

קאָנטראָלירט דורך וויעטאַס טעאָרעמע פֿאַר פֿאָלגנדיקע גלײַכונגען:

73. $x^2-6x+9=0;\ 9x^2-30x-25=0;$

74. $x^2+16=0;\quad x^2-4x-7=0.$

75. איין וואָרצל פֿון א קוואדראטער גלײַכונג מיט ראציאָנעלע קאָעפֿיציענטן איז גלײַך $3+\sqrt{2}$; א וואָסערער וועט זײַן דער צווייטער וואָרצל?

שטעלט צונויף קוואדראטע גלײַכונגען, וואָס די וואָרצלען זאָלן בא זיי זײַן פֿאָלגנדיקע צאָלן:

76. 8 און 2; 8 און -2; -8 און 2, -8 און -2.

77. 5 און 0; -5 און 0; 4 און 4; -4 און -4.

44. דרײַגליד פֿון דער צווייטער מאדרייגע.

דער אויסדרוק ax^2+bx+c בא וועלכן דער x באַדײַט א באַליביקע פֿארענדערלעכע צאָל, און a, b און c זײַנען וואָסערע ניט איז געגעבענע קאָנסטאנטע צאָלן, רופֿט זיך **קוואדראטע פֿונקציע** אָדער **דרײַגליד פֿון דער צווייטער מאדרייגע**. דער אונטערשייד צווישן אזא דרײַגליד און דעם לינקן טייל פֿון דער גלײַכונג $ax^2+bx+c=0$ באַשטייט אין דעם, וואָס אין דער גלײַכונג באַדײַט דער בוכשטאַב x בלויז יענע צאָלן, וואָס באַפֿרידיקן די גלײַכונג, בײַם אינעם דרײַגליד באַדײַט ער א וואָסערע מע וויל צאָל. די באַדײַטונגען פֿון x, וואָס פֿארוואנדלען דעם דרײַגליד אין 0, רופֿן זיך זײַנע **וואָרצלען**; הייסט עס, אז די וואָרצלען פֿון א דרײַגליד—דאָס זײַנען די וואָרצלען פֿון א קוואדראטער גלײַכונג:

$$ax^2+bx+c=0.$$

אינ איינצלנעמ פאל בא $a=1$ נעמט אָנ דער דרײַגליד דעמ אויסזענ x^2+px+q; בא $b=0$ אָדער בא $c=0$ פארוואנדלט זיכ דער דרײַגליד אינ א צווייגליד ax^2+c אָדער ax^2+bx.

45. פאנאנדערלייגנ א דרײַגליד פונ דער צווייטער מאדרייגע. לאָמיר נעמענ אפריער דעמ דרײַגליד x^2+px+q, בא וועלכנ דער קאָעפיציענט בא x^2 איז 1. אז מיר וועלנ לייזנ די נאָרמאליזירטע גלײַכונג: $x^2+px+q=0$, וועלנ מיר געפינענ זײַנע וואָרצלענ x_1 אונ x_2. ווי מיר האָבנ נאָרוואָס געזענ, איז:

$$x_1+x_2=-p$$

אונ $x_1 \cdot x_2=q$.

פונ די דאָזיקע גלײַכקײַטנ געפינענ מיר: $p=-(x_1+x_2)$ אונ $q=x_1x_2$. לאָמיר אונטערשטעלנ אינעמ דרײַגליד אפנ אָרט פונ p אונ q די דאָזיקע אויס־דרוקנ אונ לאָמיר נאָכדעמ איבעראנדערשנ דעמ באקומענעמ פילגליד:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

מיר זעענ אפ אזא אופנ, אז דער דרײַגליד x^2+px+q לייגט זיכ פאנאנדער אפ צוויי קייפלערס, וואָס דער ערשטער פונ זיי איז גלײַכ צו דער דיפערענצ צווישנ x אונ איינ וואָרצל פונעמ דרײַגליד, אונ דער צווייטער איז גלײַכ צו דער דיפע־רענצ צווישנ x אונ דעמ צווייטנ וואָרצל פונעמ דרײַגליד.

בײַשפילנ.

1) $x^2+5x-14=0$; $x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+14}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$;

$$x_1=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=2;\quad x_2=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=-7;$$

$$x^2+5x-14=(x-2)[x-(-7)]=(x-2)(x+7).$$

2) $x^2-8x+5=0$; $\quad x=4\pm\sqrt{16-5}=4\pm\sqrt{11}$;

$$x_1=4+\sqrt{11};\ x_2=4-\sqrt{11};$$

$$x^2-8x+5=[x-(4+\sqrt{11})][x-(4-\sqrt{11})]=$$
$$=(x-4-\sqrt{11})(x-4+\sqrt{11}).$$

$$3)\ x^2+px+q=0;\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$x^2+px+q=\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

לאָמיר איצטער נעמענ דעמ דרײַגליד ax^2+bx+c, אינ װעלכנ דער קאָעפי־ציענט בײַמ x^2 איז א װאָסערע מע װיל צאָל. אזא דרײַגליד קאָנ מענ פאָרשטעלנ אזוי:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

דער אױסדרוק, װאָס שטײט אינעװײניק אינ די קלאַמערנ, איז א דרײַגליד פונ דער פאָרמ

$$x^2+px+q.$$

זײַנע װאָרצלענ x_1 אונ x_2 װעלנ זײַנ די זעלביקע, װאָס בײַמ דרײַגליד

$$ax^2+bx+c.$$

אז מיר װעלנ זײ געפינענ, װעלנ מיר קאָנענ, װי עס איז דערװיזנ געװאָרנ אינעמ פאָריקנ פאראגראפ, פאנאנדערלײגנ דעמ דאָזיקנ דרײַגליד אזוי:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

הײסט עס, אז

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

אפ אזא אופנ שײדט זיכ אונטער דאָס פאנאנדערלײגנ דעמ דרײַגליד ax^2+bx+c פונעמ פאנאנדערלײגנ דעמ דרײַגליד x^2+px+q בלויז מיטנ צוגאָב־קײפלער a.

ב ײַ ש פ י ל נ.

1) דעמ דרײַגליד $2x^2-2x-12$, װאָס זײַנע װאָרצלענ זײַנענ 3 אונ -2, קאָנ מענ פאנאנדערלײגנ אזוי:

$$2(x-3)(x+2).$$

2) דער דרײַגליד $3x^2+x+1$, װאָס זײַנע װאָרצלען זײַנען פאָלגנדיקע:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{-11}}{6};\qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{-11}}{6},$$

לײגט זיך פאנאנדער אזוי:

$$3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}(6x+1-\sqrt{-11})(6x+1+\sqrt{-11}).$$

3) $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2.$

אז מיר װעלן געפינען די װאָרצלען פון דעם דאָזיקן דרײַגליד, װעלן מיר באקומען:

$$x_1=\frac{b^2}{2a};\quad x_2=\frac{a^2}{3b}.$$

דעריבער איז:

$$6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2=6ab\left(x-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2}{3b}\right)=$$

$$=6ab\left(\frac{2ax-b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx-a^2}{3b}\right)=(2ax-b^2)(3bx-a^2).$$

4) פארקירצט די ברוכצאָל:

$$\frac{2a^2-2a-12}{3a^2+a-10}$$

לאָמיר פאנאנדערלײגן דעם צײלער און דעם דײַטער אף קײפלערס און לאָמיר נאָכדעם, אויב מע קאָן, פארקירצן די ברוכצאָל. אזױװי די װאָרצלען פונעם צײלער זײַנען 3 און -2 און די װאָרצלען פונעם דײַטער זײַנען $\frac{5}{3}$ און -2, װעט דע-ריבער די ברוכצאָל ארויסקומען אזוי:

$$\frac{2(a-3)(a+2)}{3(a-\frac{5}{3})(a+2)}=\frac{2a-6}{3a-5}$$

אויספיר. לויט די געגעבענע װאָרצלען קאָן מען צונויפ־שטעלן א קװאדראטע גלײַכונג. צום בײַשפּיל, א גלײַכונג, װאָס האָט די װאָרצלען 3 און -2, װעט זײַן

$$(x-3)[x-(-2)]=0,$$

ד. ה. $(x-3)(x+2)=0$, װאָס נאָכן עפענען די קלאמערן גיט עס:

$$x^2-x-6=0.$$

פארשטייט זיכ, אז אלע גלידער פונ דער דאָזיקער גלײַכונג קאָנ מענ קייפּלענ אפ א באליביקער צאָל, וואָס הענגט ניט אָפּ פונ x (צום בײַשפּיל, אפ 2), אונ פונ דעמ וועלנ זיכ די וואָרצלענ ניט ענדערנ.

געניטונגענ

לייגט פאנאנדער אפ קייפּלערס:

78. $x^2-17x+70$; $x^2+3x-88$.

78. $3x^2-14x+8$; $6x^2+x-1$.

79. $20x^2+17x-24$; $x(x+8)-20$.

מארקירצט פאָלגנדיקע ברוכצאָלנ (אפריִער פאנאנדערלייגנ דעמ ציילער אונ דעמ דיִנער פונ יעדער ברוכצאָל אפ קייפּלערס):

80. $\dfrac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$; $\dfrac{2x^2+8x-90}{3x^2-36x+105}$.

81. $\dfrac{x^2+3ax+2a^2+ab-b^2}{x^2+2ax+a^2-b^2}$.

לייגט פאנאנדער אפ קייפּלערס פאָלגנדיקע דרײַגלידער אונ באשטימט, פאר וועלכער באדײַטונג פונעמ x וועלנ די דאָזיקע דרײַגלידער געבנ פאָזיטיווע צאָלנ אונ פאר וועלכע—נעגאטיווע:

82. x^2-6x+9; $x^2-14x+45$.

83. x^2-4x-5; $12-x-6x^2$.

II. גראפיק פונ א קוואדראטער פונקציע.

46. גראפיק פונ דער פונקציע $y=x^2$. לאָמיר ווענדנ די אויפמערקזאמקײַט אפ פאָלגנדיקע באזונדערקײַטנ פונ דער פונקציע $y=x^2$.

א) בא יעטווידער באדײַטונג פונעמ ארגומענט x איז די פונקציע מעגלעכ אונ באקומט בלויז איינ באדײַטונג. צום בײַשפּיל, בא $x=-10$ וועט די פונקציע זײַנ $(-10)^2=100$, בא $x=1000$ וועט די פונקציע זײַנ $1000^2=1000\,000$ א.ד.ג.

ב) אזוויוי $(-x)^2=x^2$, דעריבער בא צוויי באדײַטונגענ פונעמ x, וואָס שיידנ זיכ אונטער בלויז מיט די צייכנס, באקומענ זיכ צוויי אלציינע פאָזיטיווע באדײַטונגענ פונעמ y; צום בײַשפּיל, בא $x=-2$ אונ בא $x=+2$ וועט די באדײַטונג פונעמ y זײַנ איינע אונ די זעלביקע, נעמלעכ 4. נעגאטיווע באדײַטונגענ פארנ y באקומענ זיכ קיינמאָל ניט.

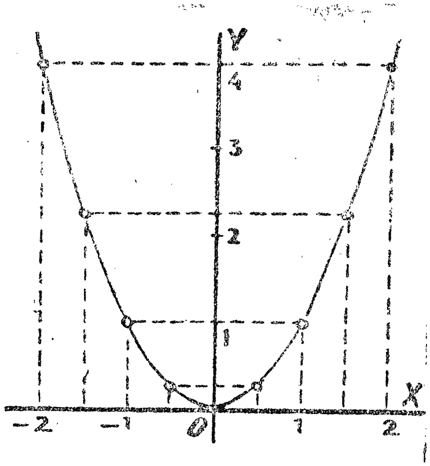
ג) אויב די אבסאָליוטע גרייס פונעמ x פארגרעסערט זיכ אומבאגרענעצט, פארגרעסערט זיכ אויכ דער y אומבאגרענעצט. אויב, צום בײַשפּיל, מיר וועלנ פאר x געבנ א ריי אומבאגרענעצט שטײַגנדיקע פאָזיטיווע באדײַטונגענ: 1, 2, 3, 4, אָדער א ריי אומבאגרענעצט פאלנדיקע נעגאטיווע באדײַטונגענ: $-1, -2, -3, -4, \ldots$; וועלנ מיר פארנ y באקומענ א ריי אומבאגרענעצט שטײַגנדיקע באדײַטונגענ: 1, 4, 9, 16, 25...

באמערקט די דאָזיקע אייגנשאפטנ, לאָמיר צונויפשטעלנ א טאבעלע פאר די באַ־דיַיטונגענ פונ דער פונקציע $y=x^2$, צום ביַישפיל אזא:

x	...	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	...
y	...	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	...

לאָמיר איצטער שילדערנ די דאָזיקע באדיַיטונגענ אפ דער צייכענונג 16 אינ דער פאָרמ פונ פונקטנ, וואָס זייערע אבסציסעס וועלנ זיַינ די אויסגעשריבענע באַ־דיַיטונגענ פונעמ x אונ די אָרדינאטעס—די אנטשפּרעכיקע באדיַיטונגענ פונעמ y (אפ דער צייכענונג האָבנ מיר פאר אנ איינס פונ לענג אָנגענומענ דעמ אָפּשניט 01); די באקומענע פונקטנ לאָמיר ארומפירנ מיט א קרומער. די דאָזיקע קרומע רופט זיכ פ א ר א ב אָ ל ע. לאָמיר באטראכטנ אייניקע אירע אייגנשאפטנ.

א) די גאנצע קרומע ליגט אפ איינ זיַיט פונ דער x־אקס, נעמלעכ—אפ יענער זיַיט, אפ וועלכער עס ליגנ די פּאָזיטיווע באדיַיטונגענ פונ די אָרדינאטעס.



צייכ. 16.

ב) א פאראבאָלע ווערט צעטיילט דורכ דער y־אקס אפ צוויי טיילנ (צוויַיגנ). דער פונקט O, אינ וועלכנ די דאָזיקע צוויַיגנ קומענ זיכ צונויפ, רופט זיכ דער שפּיצ פונ דער פאראבאָלע. דער דאָזיקער פונקט איז דער איינציקער געמיינזאמער פונקט בא דער פאראבאָלע אונ בא דער x־אקס; הייסט עס, אז אינ דעמ דאָזיקנ פונקט ב א ר י ר ט די פאראבאָלע די x־אקס.

ג) ביידע צוויַיגנ זיַינענ אומענדלעכע, וויַיל x אונ y קאָנענ זיכ פארגרעסערנ אומבאגרענעצט. די צוויַיגנ הייבנ זיכ פונ דער x־אקס אומבאגרענעצט ארופצו, דער־וויַיטערנדיק זיכ אינ דער זעלביקער ציַיט אומבאגרענעצט פונ דער y־אקס אפ רעכטס אונ אפ לינקס.

ד) די y־אקס דינט פאר דער פאראבאָלע פאר א ס י מ ע ט ר יע־א ק ס, אזוי, אז ווענ מע זאָל איבערבייגנ די צייכענונג לויט דער דאָזיקער אקס אזוי, אז די לינקע העלפט צייכע־נונג זאָל פאלנ אפ דער רעכטער, וועלנ מיר דערזענ, אז ביידע צוויַיגנ וועלנ צונויפאלנ; צומ ביַישפּיל, דער פונקט מיט דער אבסציסע -2 אונ מיט דער אָרדינאטע 4 וועט צונויפאלנ מיטנ פונקט, וואָס האָט די אבסציסע $+2$ אונ די זעלביקע אָרדינאטע 4.

47. גראפיק פונ דער פונקציע $y=ax^2$. לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ אפריער, אז a איז א צאָל א פּאָזיטיווע. לאָמיר נעמענ, צומ ביַישפּיל, אזוינע צוויי פונקציעס:

$$1)\ y=1\frac{1}{2}x^2; \qquad 2)\ y=\frac{1}{3}x^2.$$

לאָמיר צונויפשטעלנ טאבעלעס פאר די באדײַטונגענ פונ די דאָזיקע פונקציעס, צום בײַשפיל אזוינע:

1)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	...

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	...

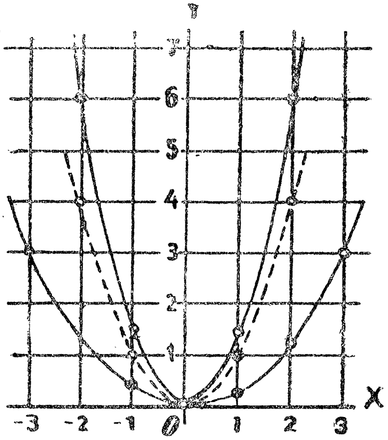
לאָמיר ארויסטראָגנ די דאָזיקע אלע באדײַטונגענ אפ דער צייכענונג 17 אונ דורכפירנ קרומע. קעדיי צו פארגלײַכנ, האָבנ מיר ארויסגעטראָגנ אפ דער זעלביקער צייכענונג (מיט פונקטיר) נאָכ א גראפיק פונ א פונקציע:

3) $y = x^2$.

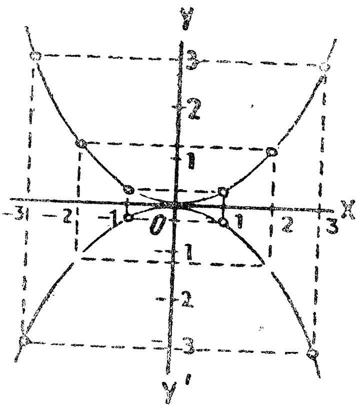
3)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

פונ דער צייכענונג איז צו זענ, אז בא איינער אונ דער זעלביקער אבסציסע איז די אָרדינאטע פונ דער ערשטער קרומער אינ $1\frac{1}{2}$ מאָל גרעסער, אונ די אָר־



צייכ. 17.



צייכ. 18.

דינאטע פונ דער צווייטער קרומער אינ 3 מאָל קלענער, איידער די אָרדינאטע פונ דער דריטער קרומער. מאכמעס דעם האָבנ אלע אזוינע קרומע א געמײַנזאמענ כאראקטער: אומענדלעכע צווײַגנ, סימעטריע־אקס אונ אנד., נאָר בא $a > 1$ זײַנענ די צווײַגנ פונ דער קרומער אויפגעהויבנ מער ארויפצו, אונ בא $a < 1$ זײַנענ זיי מער אראָפגעבויגנ אראָפצו, איידער בא דער קרומער $y = x^2$. אלע אזוינע קרומע רופנ זיכ אויכ פ א ר א ב אָ ל ע ס.

לאָמיר זיך איצטער פאָרשטעלן, אז דער קאָעפיציענט a וועט זײַן א צאָל א נעגאַטיווע. זאָל זײַן, צום בײַשפּיל, $y=-\frac{1}{3}x^2$. פאַרגלײַכנדיק די דאָזיקע פונקציע מיט אזא: $y=+\frac{1}{3}x^2$, באַמערקן מיר, אז בא איינער און דערזעלביקער באַדײַטונג פונעם x האָבן ביידע פונקציעס איינע און די זעלביקע אבסאָלוטע גרייס, נאָר זיי זײַנען קעגנזײַטיקע צייכנס. דעריבער וועט זיך אפ דער צייכענונג 18 פאַר דער פונקציע $y=-\frac{1}{3}x^2$ באַקומען פונקט אזא פּאַראַבאָלע, ווי פאַר דער פונקציע $y=+\frac{1}{3}x^2$, נאָר זי וועט ליגן אונטער דער x-אַקס סימעטריש מיט דער פּאַראַבאָלע $y=\frac{1}{3}x^2$. אין דעם דאָזיקן פאַל זײַנען אַלע באַדײַטונגען פון דער פונקציע נעגאַטיווע, כוץ איינער, וואָס איז גלײַך צו נול בא $x=0$.

באַמערקונג. אויב די אָפּהענגיקייט צווישן צוויי פאַרענדערלעכע גרייסן y און x דריקט זיך אויס דורך דער גלײַכקייט $y=ax^2$, ווו a איז א וואָסערע עס איז קאָנסטאַנטע צאָל, קאָן מען זאָגן, אז די גרייס y איז פּראָפּאָרציאָנעל צום קוואַדראַט פון דער גרייס x, ווײַל מיטן פאַרגרעסערן אָדער פאַרקלענערן דעם x אין 2 מאָל, אין 3 מאָל א. א. וו. פאַרגרעסערט זיך אָדער פאַרקלענערט זיך די גרייס y אין 4 מאָל, אין 9 מאָל, אין 16 מאָל א. א. וו.

צום בײַשפּיל, דער שעטעך פון א קרײַז איז גלײַך πR^2, ווו R איז דער ראַדיוס פונעם קרײַז און π איז א קאָנסטאַנטע צאָל (וועלכע איז גלײַך, אַנערעך, צו 3,14); דעריבער קאָן מען זאָגן, אז דער שעטעך פון א קרײַז איז פּראָפּאָרציאָנעל צום קוואַדראַט פון זײַן ראַדיוס.

48. גראַפיק פון דער פונקציע $y=ax^2+b$. לאָמיר האָבן פאָלגנדיקע דרײַ פונקציעס:

$$1)\ y=\frac{1}{3}x^2; \qquad 2)\ y=\frac{1}{3}x^2+2; \qquad 3)\ y=\frac{1}{3}x^2-2.$$

ס'איז קלאָר, אז בא איינער און דער זעלביקער באַדײַטונג פונעם אַרגומענט x איז די אָרדינאַטע פון דער צווייטער פונקציע גרעסער, און די אָרדינאַטע פון דער דריטער פונקציע קלענער אפ 2 איינסן, איידער די אַנטשפּרעכיקע אָרדינאַטע פון דער ערשטער פונקציע. דעריבער וועלן די צווייטע און די דריטע פונקציע געשילדערט ווערן אפ דער צייכענונג דורך דער זעלביקער פּאַראַבאָלע, ווי די ערשטע פונקציע, נאָר די דאָזיקע פּאַראַבאָלע דאַרף זײַן אויפגעהויבן אַרויפצו (פאַר דער צווייטער פונקציע) און אַראָפּגעלאָזן אַראָפּצו (פאַר דער דריטער פונקציע) אפ 2 איינסן פון דער לענג.

בכלל, די גראַפיק פון דער פונקציע $y=ax^2+b$ איז די זעלביקע פּאַראַבאָלע, וואָס שילדערט די פונקציע $y=ax^2$, נאָר די דאָזיקע פּאַראַבאָלע דאַרף זײַן אויפגעהויבן אַרויפצו, אויב $b>0$, און אַראָפּגעלאָזן אַראָפּצו, אויב $b<0$, אפ b איינסן פון דער לענג.

געניטונגען

85. צייכנט אָן בא איינע און די זעלביקע אַקסן און בא איינעם און דעם זעלביקן איינס פון דער לענג גראַפיקעס פון פאָלגנדיקע פונקציעס:

$$y=\frac{1}{4}x^2; \quad y=\frac{1}{2}x^2; \quad y=2x^2; \quad y=\frac{1}{2}x^2+1; \quad y=\frac{1}{2}x^2-1.$$

86. דאָס זעלביקע פאַר די פונקציעס $y=x^2$ און $y=\frac{1}{2}x+1$; באַשטימט די קאָאָרדינאַטנ פונעמ איבערשנייַד־פּונקט פונ די דאָזיקע גראַפיקעס און שטעלט זיי אונטער אינ דער גלייַכונג מיטנ ציל צו קאָנטראָלירנ די צייכענונג.

49. גראַפיק פונ א דרייַגליד פונ דער צווייטער מאַדרייגע.

אפריִער וועלנ מיר באַטראַכטנ א גראַפיק פונ אזא דרייַגליד, וואָס קאָנ פאָרגעשטעלט ווערנ אינ דער פאָרמ פונעמ קייפל־פּראָדוקט $a(x+m)^2$. לאָמיר נעמענ, צומ בייַשפּיל, אזוינע צוויי פונקציעס:

$$1)\ \ y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \ \text{ און }\ 2)\ y=\frac{1}{4}(x-2)^2.$$

אפ פאַרגלייַכנ לאָמיר שילדערנ אפ דער זעלביקער צייכענונג נאָכ א פאַראַבאָלע:

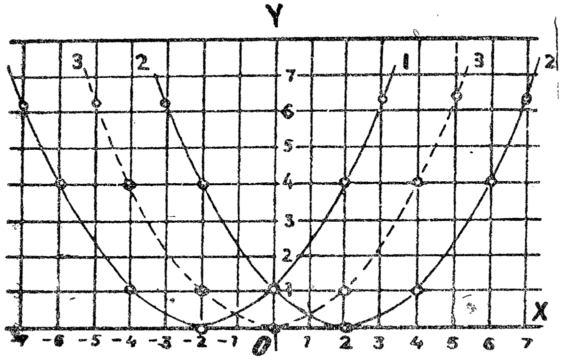
$$3)\ \ y=\frac{1}{4}x^2$$

אפריִער לאָמיר צונויפשטעלנ א טאַבעלע פונ איינצלנע באַדייַטונגענ פונ די דאָזיקע דרייַ פונקציעס, צומ בייַשפּיל, אזא:

$x=$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1) $y=\frac{1}{4}(x+2)^2=$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16
2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2=$	$12\frac{1}{4}$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
3) $y=\frac{1}{4}x^2$	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

אז מיר וועלנ אַרופטראָגנ די דאָזיקע אַלע באַדייַטונגענ אפ דער צייכענונג, וועלנ מיר באַקומענ דרייַ גראַפיקעס, וואָס זייַנענ געשילדערט אפ דער צייכענונג 19.

באַטראַכטנדיק די דאָזיקע צייכענונג, באַמערקנ מיר, אז די קרומע 1 איז די זעלביקע פאַראַבאָלע 3, נאָר אַנ אַריבערגעטראָגענע אפ 2 איינסנ אפ לינקס, און די קרומע 2 איז די זעלביקע פאַראַבאָלע 3, נאָר אַנ אַריבערגעטראָגענע אפ 2 איינסנ אפ רעכטס.



צייכענונג 19.

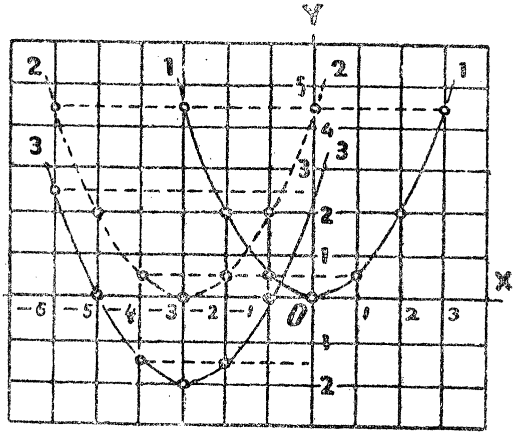
פאַראַלגעמיינערנדיק דעמ דאָזיקנ אויספיר, קאָנענ מיר זאָגנ, אז די גראַפיק פונ דער פונקציע $y=a(x+m)^2$ איז א פאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס די פונקציע $y=ax^2$, נאָר די דאָזיקע פאַראַבאָלע איז אַריבערגעטראָגנ אפ ל י נ ק ס, אויב $m>0$, און אפ ר ע כ ט ס, אויב $m<0$, אפ אזוי פיל איינסנ, וויפל עס אַנטהאַלט אינ זיכ די אַב־

פּאָליוטע גרייס פון דער צאָל m. די צווייַגן פון דער דאָזיקער פּאַראַבאָלע זייַנען געווענדט אַרויפצו, אויב $a>0$, ווי אין אונדזערע בייַשפּילן, און אַראָפּצו, אויב $a<0$, צום בייַשפּיל, אויב עס וואָלט געווען פאַרגעבן: $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$.

איצטער לאָמיר נעמען אַ דרייַגליד פון דער פאָרם: $y=ax^2+bx+c$, צום בייַשפּיל, אַזאַ פאַל: $y=\frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	6	...

אז מיר וועלן קאָנסטרויִרן די פּונקטן, וואָס דריקן אויס די באַדייַטונגען, וועלכע זייַנען אַרייַנגעשטעלט אין דער טאַבעלע, און וועלן דורכפירן דורך זיי אַ קרומע (קרומע 3-טע, צייכ. 20), וועלן מיר באַקומען די געזוכטע גראַפיק. לאָמיר איצטער באַווייַזן, אַז די דאָזיקע גראַפיק איז די זעלביקע פּאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס די פונקציע $y=\frac{1}{2}x^2$ (זי באַקומט זיך דורך אָפּוואַרפן אין דעם געגעבענעם דרייַגליד דעם צווייטן און דעם דריטן גליד), נאָר די דאָזיקע פּאַראַבאָלע איז אַריבערגעטראָגן אין אַן אַנדער אָרט. צוליב דעם לאָמיר אומבילדן דעם געגעבענעם דרייַגליד אויפן פאָלגנדיקן אופן: ערשטנס, לאָמיר אַרויסטראָגן אויסער די קלאַמערן דעם קאָעפיציענט באַם x^2:



צייכ. 20.

$$\frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+6x+5);$$

צווייטנס, לאָמיר צום דרייַגליד, וואָס שטייט אין די קלאַמערן, צוגעבן צוויי קעגנזייַטיק זיך אַנולירנדיקע גלידער 9 און -9:

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+5)=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5)$$

און, דריטנס, לאָמיר צונויפגרופּירן די גלידער פונעם פילגליד אין 2 גרופּעס אַזוי:

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5)=\frac{1}{2}[(x^2+6x+9)-(9-5)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(x+3)^2-4]=\frac{1}{2}(x+3)^2-2.$$

אַז מיר וועלנ נעמענ איצטער אונ באַטראַכטנ די בײַשפּילנ, וואָס זײַנען פאַנאַנדערגעקליבנ געוואָרנ פריִער, קאָנענ מיר טאָנ אַזוי:

לאָמיר קאָנסטרויִרנ אַ פּאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס די פונקציע: $y=\frac{1}{2}x^2$ (קרומע 1-טע, צייכ. 20), אונ נאָכדעם אַריבערטראָגנ זי אויפ 3 אייניקנ לינקס, וועלנ מיר דערמיט באַקומענ אַ 2-טע פּאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס די פונקציע $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$. לאָמיר איצטער די דאָזיקע פּאַראַבאָלע אַריבערטראָגנ אויפ 2 אייניקנ אַראָפּצו, וועלנ מיר דערמיט באַקומענ אַ דריטע פּאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס די געגעבענע פונקציע.

50. **גראַפישע לייזונג פונ אַ קוואַדראַטער גלײַכונג.** אַ קוואַדראַטע גלײַכונג קאָנ מענ גראַפיש לייזנ מיט אַזאַ מיטל: מיר קאָנסטרויִרנ אויפ מילימעטערדיקנ פּאַפּיר אַ פּאַראַבאָלע, וואָס דריקט אויס דעמ דרײַגליד, וועלכער שטייט אינ לינקנ טייל גלײַכונג, אונ מיר געפינענ די פונקטנ, ווו די דאָזיקע פּאַראַבאָלע שנײַדט זיכ איבער מיט דער x-אַקס. די אַבסציסעס פונ די דאָזיקע פונקטנ וועלנ דאָס זײַנ וואָרצלענ פונ דער גלײַכונג, ווײַל בײַ די דאָזיקע אַבסציסעס זײַנענ די אָרדינאַטעס, וועלכע דריקנ אויס די אַנטשפּרעכיקע באַדײַטונגענ פונעמ דרײַגליד, גלײַכ צו נול.

ב ײַ ש פּ י ל נ.

$$1)\ \frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}=0.$$

די גראַפיק פונעמ לינקנ טייל פונ דער דאָזיקער גלײַכונג איז געשילדערט דורכ דער קרומער 3 (צייכ. 20). אויפ איר זעענ מיר, אַז די פּאַראַבאָלע שנײַדט זיכ איבער מיט x-אַקס אינ צוויי פונקטנ, וואָס זייערע אַבסציסעס זײַנענ —1 אונ —5. דאָס וועלנ טאַקע זײַנ די וואָרצלענ פונ דער גלײַכונג. דאָס קאָנ מענ דורכקאָנטראָלירנ, ווענ מיר וועלנ לייזנ די גלײַכונג דורכ דער אַלגעמיינער פאָרמולע אָדער דורכ אונטערשטעלנ.

$$2)\ \frac{1}{2}x^2-2x+2=0.$$

מיר וועלנ צונויפשטעלנ די טאַבעלע פאַר אייניצלנע באַדײַטונגענ פונעמ דרײַגליד

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$$

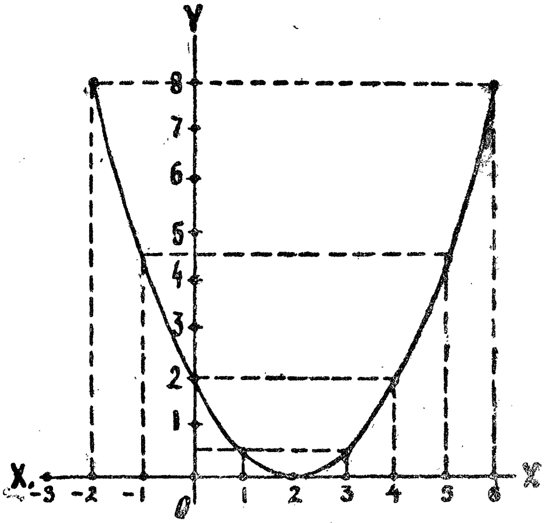
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	...

און וועלנ קאָנסטרויִרנ די פּאראבאָלע (צייכ. 21). די דאָזיקע פּאראבאָלע שנײַדט זיכ ניט איבער מיט דער x־אקס, נאָר זי באַרירט זי בלויז אינעם פּונקט מיט דער אבסציסע 2. די גלײַכונג האָט אינ דעם דאָזיקנ פאל בלויז איינ וואָרצל 2 (פּינקטלעכער צוויי גלײַכע וואָרצלענ).

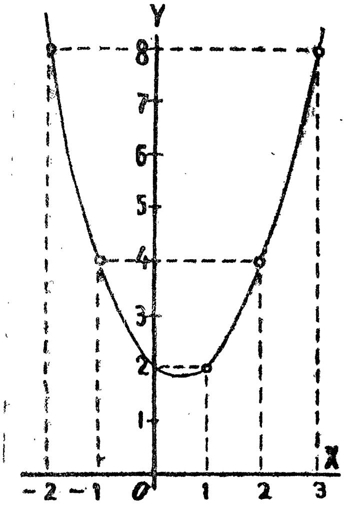
$$3)\ x^2 - x + 2 = 0.$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	14	8	4	2	2	4	8	14	...

די פּאראבאָלע (צייכ. 22) שנײַדט זיכ ניט איבער און באַרירט ניט די x־אקס; די גלײַכונג האָט ניט קיינ רעאלע וואָרצלענ.



צייכ. 21.



צייכ. 22.

מיר וועלנ נאָכ אַנווײַזנ פּאָלגנדיקנ מיטל פונ גראפישער לייזונג. זאָל זיכ פּאָדערנ צו לייזנ די גלײַכונג:

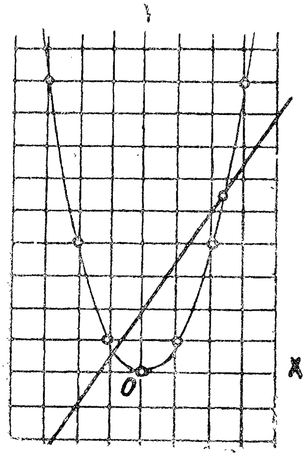
$$x^2 - 1{,}5x - 2 = 0.$$

לאָמיר זי פאָרשטעלנ אזוי:

$$x^2 = 1{,}5x + 2.$$

יעדער טייל פונ דער דאָזיקער גלײַכונג, ווענ מע באטראכט אים באזונדער, איז א געוויסע פונקציע פונ x. לאָמיר באצייכענענ די פונקציע, וואָס ווערט אויסגעדריקט דורכנ לינקנ טייל גלײַכונג, מיטנ בוכשטאב y_1, און די פונקציע, וואָס ווערט

אויסגעדריקט דורכן רעכטן טייל גלײַכונג, מיטן בוכשטאַב y_2. די ערשטע פונקציע ווערט אָפּ דער צייכענונג 23 געשילדערט ווי א פּאַראַבאָלע, און די צווייטע — ווי א גראָדע. אז מיר וועלן קאָנסטרויִרן אָפּ אייגער און דער זעלביקער צייכענונג די גראַפּיקעס פון די דאָזיקע צוויי פונקציעס, וועלן מיר געפינען, אז די גראָדע און די פּאַראַבאָלע שנײַדן זיך איבער אין צוויי פונקטן, וואָס זייערע אַבסציסעס דריקן זיך אויס, אַנערעך, מיט די צאָלן 2,35 און $-0,85$. דאָס וועלן טאַקע זײַן די אומגעפּערע באַדײַטונגען פון די וואָרצלען בא דער געגעבענער גלײַכונג, ווײַל בא יעדערער פון די דאָזיקע אַבסציסעס זײַנען די אָרדינאַטעס y_1, y_2 גלײַך צווישן זיך, און, דעריבער, איז $x^2=1,5x+2$.



צייכ. 23.

אויב עס טרעפט זיך, אז די גראָדע שנײַדט זיך ניט איבער מיט דער פּאַראַבאָלע, האָט די גלײַכונג ניט קיין רעאַלע וואָרצלען; אויב אָבער די גראָדע באַרירט די פּאַראַבאָלע, האָט די גלײַכונג איין וואָרצל, וואָס איז גלײַך צו דער אַבסציסע פונעם באַריר־פונקט.

געניטונגען.

שטעלט צונויף טאַבעלעס פון איינצלנע באַדײַטונגען און קאָנסטרויִרט גראַפּיקעס פון פאָלגנדיקע דרײַגלידער:

87. $y=x^2-2x-2$; $\quad y=2x^2+3x-2$.

88. $y=x^2+4x-1$; $\quad y=-x^2+2x-2$.

89. $x=-2y^2-4y-2$; $\quad y=x^2-3x-5$.

לייזט גראַפּיש פאָלגנדיקע גלײַכונגען:

90. $x^2=x+6$; $\quad x^2=2x+2$; $\quad x^2=2-3x$.

91. $x^2=3x+5$; $\quad x^2=12x-36$; $\quad x^2=\frac{3x+4}{2}$.

51. בּיקוואַדראַטע גלײַכונג. א גלײַכונג פון דער פערטער מאַדרייגע, צום בײַשפּיל, אזא:

$$x^4-13x^2+36=0,$$

אין וועלכער עס גייען אַרײַן בלויז גראָדע מאַדרייגעס פונעם אומבאַוווּסטן, רופט זיך **ביקוואַדראַטע**. זי קאָן געבראַכט ווערן צו א קוואַדראַטער, אויב מיר וועלן פאַרבײַטן x^2 אָפּ y און, הייסט עס, x^4 אָפּ y^2; דעמלט וועט זיך די גלײַכונג פאַרוואַנדלען אין א קוואַדראַטער:

$$y^2-13y+36=0.$$

לאָמיר זי לייזנ:

$$y=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$y_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9; \qquad y_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4.$$

אָבער פונ דער גלײַכקײַט $x^2=y$ איז צו זענ, אַז $x=\pm\sqrt{y}$. אונטער־שטעלנדיק אַהער אַפנ אָרט פונעם y די געפונענע צאָלנ 9 און 4, באַקומענ מיר פאָלגנדיקע פיר לייזונגענ פונ דער געגעבענער גלײַכונג:

$$x_1=+\sqrt{9}=3; \qquad x_2=-\sqrt{9}=-3;$$

$$x_3=+\sqrt{4}=2; \qquad x_4=-\sqrt{4}=-2.$$

לאָמיר צונויפשטעלנ פאָרמולעס פאַר דער אַלגעמײנער פאָרמ פונ א ביקוואַדראַטער גלײַכונג:

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

לאָמיר אָנעמענ, אַז $x^2=y$, וועלנ מיר באַקומענ די גלײַכונג

$$ay^2+by+c=0$$

פונ וועלכער מיר געפינענ:

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

אָבער אַזוי ווי $x=\pm\sqrt{y}$, וועלנ מיר פאַר דער ביקוואַדראַטער גלײַכונג באַקומענ פאָלגנדיקע פיר לייזונגענ:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

פונדאַנענ זעט מענ, אַז אויב $b^2-4ac<0$, זײַנענ אַלע פיר וואָרצלענ שײַנבאַרע; אויב אָבער $b^2-4ac>0$, קאָנענ זײַנ דרײַ פאַלנ: 1) אַלע וואָרצלענ זײַנענ רעאַלע (ווי אינ דעמ פריִער געבראַכטנ צאָליקנ בײַשפּיל), אויב

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}>0 \quad \text{און} \quad -b-\sqrt{b^2+4ac}>0;$$

2) אלע וואָרצלענ זײַנענ שײנבארע, אויב די דאָזיקע בײדע אויסדרוקנ וועלנ געבנ עגאטיווע צאָלנ, און 3) צוויי וואָרצלענ זײַנענ רעאלע און צוויי שײנבארע, אויב

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$$

און

$$-b-\sqrt{b^2-4ac}<0$$

ענדלעכ, אויב $b^2-4ac=0$,

ווערנ די פיר וואָרצלענ פּאָרווײַז גלײַכע.

52. גלײַכונגענ, וואָס זײער לינקער טײל לײגט זיכ פאנאנדער אפ קײפלערס און דער רעכטער איז גלײַכ צו נול. לײזנ אזוינע גלײַכונגענ באשטײט אינ לײזנ גלײַכונגענ פונ נידעריקערע מאדרײגעס. מיר האָבנ געזענ, אז קעדײ צו לײזנ ניט קײנ פולע קוואדראטע גלײַכונג פונ דער פאָרם $ax^2+bx=0$ דארפ מענ איר לינקנ טײל פאנאנדערלײגנ אפ צוויי קײפלערס: $x(ax+b)=0$ און נאָכדעמ, נעמענדיק אינ באטראכט, אז דער קײפל־פּראָדוקט איז גלײַכ צו נול בלויז דעמלט, ווענ א וואָסער ניט איז מיטקײפלער איז גלײַכ צו נול, ברענגענ די לײזונג פונ דער דאָזיקער גלײַכונג צום לײזנ צוויי גלײַכונגענ פונ דער ערשטער מאדרײגע: $x=0$ און $ax+b=0$.

אפ אנ ענלעכנ אופנ קאָנ מענ לײזנ ניט קײנ פולע קובישע גלײַכונג, וואָס פארמאָגט ניט קײנ פרײַענ גליד, צום בײַשפּיל, אזא:

$$x^3+3x^2-10x=0.$$

אז מיר וועלנ ארויסטראָגנ דעמ x אויסער די קלאמערנ, וועלנ מיר פאָרשטעלנ די גלײַכונג אזוי:

$$x(x^2+3x-10)=0$$

און זי ועט, הײסט עס, צעפאלנ זיכ אפ צוויי גלײַכונגענ:

$$x=0$$

און $x^2+3x-10=0$

פונ די דאָזיקע גלײַכונגענ געפינענ מיר דרײַ לײזונגענ:

$$x_1=0;$$

$$x_2=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+10}=2;$$

$$x_3=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}+10}=-5.$$

לאָמיר ברענגענ נאָכ א גלײַכונג צו אזא אויסזענ:

$$x(x+4)(x^2-5x+6)=0.$$

דעמלט צעפאלט זי אפ דרײַ גלײַכונגענ:

$$x=0; \qquad x+4=0; \qquad x^2-5x+6=0.$$

די דאָזיקע גלײַכונגענ גיבנ:

$$x_1=0; \qquad x_2=-4; \qquad x_3=2; \qquad x_4=3.$$

געניטונגען.

לייזט פאָלגנדיקע גלײַכונגען:

92. $x^4-5x^2+4=0;$ $\qquad x^4-10x^2+9=0.$

93. $x^4-2x^2-3=0;$ $\qquad 2x^4-7x^2=4.$

94. $x^4-25x^2+144=0;$ $\qquad x^4-2x^2=63.$

53. צווייגלידערדיקע גלײַכונג. א צווייגלידערדיקע גלײַכונג רופט זיך א גלײַכונג פון דער פאָרם: $ax^m+b=0$, אָדער, וואָס איז די זעלביקע זאַך, פון דער פאָרם $x^m+\frac{b}{a}=0$ [1]. אז מיר וועלן באַצייכענען די אַבסאָלוטע גרייס פון דער ברוכצאָל $\frac{b}{a}$ דורך q, וועלן מיר קאָנען די צווייגלידערדיקע גלײַכונג פאַרשרײַבן אָדער $x^m+q=0$, אָדער $x^m-q=0$. מיט דער הילף פון א באַהילפיקן אומבאַוווּסטן קאָן מען די דאָזיקע גלײַכונגען שטענדיק פאַרייִנפאַכן אזוי, אז דער פרײַער גליד בא דער ערשטער וועט זיך פאַרוואַנדלען אין $+1$, און בא דער צווייטער אין -1. אינדערעמעסן, לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אז $x=y\sqrt[m]{q}$, ווו $\sqrt[m]{q}$ איז דער אריפמעטישער וואָרצל פון m-טער מאדרייגע פון q; דעמלט איז $x^m=qy^m$, און די גלײַכונגען וועלן צונעמען די פאָרם:

$$qy^m+q=0$$
ד. ה. $$q(y^m+1)=0$$
פונוואַנען $$y^m+1=0$$

אָדער

$$qy^m-q=0$$
ד. ה. $$q(y^m-1)=0;$$
פונוואַנען $$y^m-1=0.$$

הייסט עס, אז די לייזונג פון צווייגלידערדיקע גלײַכונגען ווערט געבראַכט צום לייזן גלײַכונגען פון דעם פאָרם $y^m\pm1=0$. לייזן אזעלכע גלײַכונגען מיט עלעמענטאַרע מיטלען קאָן מען בלויז בא געוויסע אייַנצלנע באַדײַטונגען פונעם מאדרייגע-ווײַזער m. דער אַלגעמיינער מיטל, וואָס ווערט דערבײַ באַנוצט, באַשטייט אין פאַנאַנדערלייגן דעם לינקן טייל פון דער גלײַכונג אף קייפלער, און נאָכדעם ווערט די גלײַכונג געבראַכט צו דער פאָרם, וואָס מיר האָבן פריִער באַטראַכט.

54. לייזן צווייגלידערדיקע גלײַכונגען פון דער דריטער מאדרייגע. די דאָזיקע גלײַכונגען זײַנען פאָלגנדיקע: $x^3-1=0$ און $x^3+1=0$.

באַמערקנדיק, אז:

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$$

און

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1),$$

---

[1] ווען א צווייגלידערדיקע גלײַכונג האָט די פאָרם $ax^m+bx^n=0$, ווו $m>n$, קאָן מען זי פאָרשטעלן אזוי: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$, און, הייסט עס, זי צעפאַלט אף צוויי גלײַכונגען: $x=0$ און $ax^{m-n}+b=0$.

קאָנען מיר די פֿאָרגעלייגטע גלײַכונגען אָנשרײַבן אזוי:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

און

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

הייסט עס, אז די ערשטע פֿון זיי האָט די וואָרצלען פֿון די גלײַכונגען $x-1=0$ און $x^2+x+1=0$, און די צווייטע—די וואָרצלען פֿון די גלײַכונגען: $x+1=0$ און $x^2-x+1=0$.

ווען מיר וועלן זיי לייזן, וועלן מיר געפֿינען, אז די גלײַכונג $x^3-1=0$ האָט פֿאָלגנדיקע דרײַ וואָרצלען:

$$x_1=1, \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

וואָס פֿון זיי איז איינער א רעאַלער, און צוויי שיינבארע; די גלײַכונג $x^3+1=0$ האָט דרײַ וואָרצלען:

$$x_1=-1, \qquad x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \; x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

וואָס פֿון זיי איז אויך איינער א רעאַלער און צוויי שיינבארע.

אין קאַפּיטל וועגן קאָמפּלעקס־צאָלן (§ 137) וועלן מיר זיך איבערצײַגן, אז די צוויי לעצטע (שיינבארע) אויסדרוקן, זײַענדיק דערהייבן אין קוב, וועלן געבן אן איינס.

55. פֿארשיידענע באַדײַטונגען פֿון וואָרצל. די לייזונג פֿון צווייגלידעריקע גלײַכונגען איז ענג צוזאמענגעבונדן מיט געפֿינען אַלע באַדײַטונגען פֿון וואָרצל (ראדיקאַל) פֿון א געגעבענער צאָל. און ווירקלעך, געפֿינען $\sqrt[m]{A}$ איז דאָס זעלביקע, וואָס לייזן די גלײַכונג $x^m=A$, ד. ה. $x^m-A=0$, און דעריבער האָט די דאָזיקע גלײַכונג אזויפֿיל וואָרצלען, וויפֿל $\sqrt[m]{A}$ האָט באַדײַטונגען.

באַזירנדיק זיך אָף דער דאָזיקער באַמערקונג, לאָמיר באַווײַזן, אז, צום בײַשפּיל, *א קובישער וואָרצל פֿון יעדער רעאַלער צאָל האָט דרײַ פֿארשיידענע באַדײַטונגען.*

זאָל זיך פֿאָדערן געפֿינען $\sqrt[3]{A}$ ד. ה., מיט אנדערע ווערטער, לייזן די גלײַכונג: $x^3-A=0$. באַצייכענענדיק די אריפֿמעטישע באַדײַטונג פֿון $\sqrt[3]{A}$ מיטן בוכשטאַב q, לאָמיר זיך פֿאָרשטעלן, אז x איז גלײַך צו qy. דעמלט קען מען די גלײַכונג $x^3-A=0$ פֿאָרשטעלן אזוי: $q^3y^3-A=0$. אָבער $q^3=A$, דעריבער באַקומט זיך

$$q^3y^3-A=A(y^3-1),$$

און די גלײַכונג נעמט אָן די געשטאַלט:

$$y^3-1=0.$$

מיר האָבן געוען אין פאָריקן פּאַראַגראַף, אַז די דאָזיקע גלײַכונג האָט דרײַ וואָרצלען:

$$y_1 = 1\ ;\ y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\ \ y_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

יעדערע פון די דאָזיקע באַדײַטונגען, באַפרידיקנדיק די גלײַכונג $y^3 = 1$, שטעלט מיט זיך פאָר א קובישן וואָרצל פון 1. אָבער אַזויווי $x = qy$, איז:

$$x_1 = q_1 = q;\ \ x_2 = q\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\ ;\ \ x_3 = q\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

דאָס וועלן זײַן די דרײַ באַדײַטונגען פון $\sqrt[3]{A}$; איינע פון זיי איז א רעאַלע (אַריפמעטישע), און צוויי—שיינבאַרע. זיי אַלע באַקומען זיך, אויב מיר זאָלן די אַריפמעטישע באַדײַטונג $\sqrt[3]{A}$ קייפלען אַף יעדערער פון די דרײַ באַדײַטונגען פון $\sqrt{1}$

צום בײַשפּיל, דער קובישער וואָרצל פון 8 האָט די פאָלגנדיקע דרײַ באַדײַטונגען:

$$2;\ \ 2\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -1+\sqrt{-3};\ \ 2\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = -1\sqrt{-3}$$

56. דרײַגלידערדיקע גלײַכונג.

אַזוי רופט זיך א גלײַכונג פון דער פאָרם:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(אין איינצלנער פאַל פון אַזא פאָרם בײַ $n = 2$ איז א ביקוואַדראַטע גלײַכונג). זי קאָן דערפירט ווערן צו א קוואַדראַטער, אויב מיר וועלן אַרײַנפירן א באַהילפיקן אומבאַוווּסטן $y = x^n$. דעמלט וועט די גלײַכונג אָננעמען די פאָרם:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

פונוואַנען

$$y = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

הייסט עס, אַז

$$x^n = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

לייזנדיק, אויב עס איז מעגלעך, די דאָזיקע צווייגלידערדיקע גלײַכונג, וועלן מיר געפינען אַלע באַדײַטונגען פונעם x.

בײַשפּיל.

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0;$$

$$x^3 = y;\ y^2 - 9y + 8 = 0;\ y = \frac{9}{2} \pm\sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \frac{9\pm 7}{2}\ ;\ y_1 = 8;\ y_2 = 1;$$

הייסט עס, אַז

$$x^3 = 8;\ \text{און}\ \ x^3 = 1.$$

אז מיר וועלן לייזן די דאָזיקע צווייגלידערדיקע גלײַכונגען פון דער דריטער מאדרייגע, וועלן מיר באקומען זעקס באדײַטונגען פאַרן x:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -1 + \sqrt{-3};\ x_3 = -1 - \sqrt{-3};$$

$$x_4 = 1;\ x_5 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2};\ x_6 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

געניטונגען:

לייזט די גלײַכונגען.

95. $x^3 = m^3;\ x^3 + 729 = 0;\ x^6 = 64.$

96. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0;\ x^{2m} = 2ax^m = 8a^2.$

III. סיסטעמעס גלײַכונגען פון דער צווייטער מאדרייגע.

57. וואָס רופט זיך א מאדרייגע פון א גלײַכונג מיט עטלעכע אומבאוווּסטע. קעדיי צו באשטימען די מאדרייגע פון א גלײַכונג, אין וועלכער עס גייען אַרײַן עטלעכע אומבאוווּסטע, דאַרף מען אפריִער די דאָזיקע גלײַכונג פאַר־ײַנפאַכן (עפענען די קלאַמערן, באפרײַען פון ראַדיקאַלן און דײַטערס, וואָס אנט־האַלטן אומבאוווּסטע, און צונויפגיסן די ענלעכע גלידער). דעמלט איז:

די מאדרייגע פון דער גלײַכונג רופט זיך די סומע מאדרייגע־ווײַזערס בא די אומבאוווּסטע אין יענעם גליד פון דער גלײַכונג, אין וועלכן די דאָזיקע סומע איז די סאַמע גרעסטע.

צום בײַשפּיל, די דרײַ גלײַכונגען:

$$x^2 + 2xy - x + 2 = 0,\ 3xy = 4,\ 2x + y^2 - y = 0$$

וועלן זײַן גלײַכונגען פון דער צווייטער מאדרייגע; די גלײַכונג $3x^2y - y^2 + x + 10 = 0$ איז א גלײַכונג פון דער דריטער מאדרייגע (מיט צוויי אומבאוווּסטע) א. ד. ג.

מיר וועלן איצטער באטראכטן, ווי ווערן געלייזט אייניקע פּאַשעטסטע סיסטע־מעס גלײַכונגען פון דער צווייטער מאדרייגע מיט צוויי אומבאוווּסטע.

לאָמיר באמערקן, אז די סומע ווײַזערס בא די אומבאוווּסטע אין וועלכן עס איז גליד פון א גלײַכונג הייסט זײַן אויסמעסטונג. צום בײַשפּיל, די גלידער:

$$2xy,\ 5x^2,\ 3y^2$$

זײַנען פון דער צווייטער אויסמעסטונג; די גלידער:

$$0{,}2x^2y,\ \ 10xy^2,\ \ \frac{1}{2}xy$$

זײַנען פון דער דריטער אויסמעסטונג א. א. וו. א גליד, וואָס אנטהאַלט ניט קיין אומבאוווּסטע, איז פון דער נולקער אויסמעסטונג.

לאָמיר נאָכ באמערקנ, אז א גלײַכונג הײסט אנ א י נ א ר ט י ק ע, אויב אלע אירע גלידער זײַנען פונ דער זעלביקער אויסמעסטונג, צומ בײַשפּיל, $3x^2+xy-2y^2=0$ איז אנ אײנארטיקע גלײַכונג פונ דער צווײטער מאדרײגע מיט צווײ אומבאַוווּסטע.

58. די אלגעמײנע פאָרמ פונ א פולער גלײַכונג פונ דער צווײטער מאדרײגע מיט צווײ אומבאוווּסטע איז, ווי פארשטענדלעכ, די פאָלגנדיקע:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

אינ איר זײַנענ די ערשטע דרײַ גלידער פונ דער צווײטער אויסמעסטונג, די ווײַטערדיקע צווײ גלידער פונ דער ערשטער אויסמעסטונג אונ דער לעצטער (פרײַער) גליד פונ דער נוליקער. די קאָעפיציִענטנ: a, b, c קענענ זײַנ צאָלנ פּאָזיטיווע, נעגאטיווע אונ אפילע גלײַכ צו נול (פארשטײט זיכ, די קאָעפיציִענטנ a, b, c, קענענ ניט זײַנ פאר אײנ מאָל גלײַכ צו נול, ווײַל די גלײַכונג וואָלט דאָכ דעמלט ווערנ ניט פונ דער צווײטער, נאָר פונ דער ערשטער מאדרײגע).

איצטער וועלנ מיר באטראכטנ, ווי לײזט מענ די אײנפאכסטע סיסטעמעס פונ צווײ גלײַכונגענ פונ דער צווײטער מאדרײגע מיט צווײ אומבאוווּסטע.

59. סיסטעמ פונ צווײ גלײַכונגענ, וואָס אײנע פונ זײ איז פונ דער ערשטער מאדרײגע אונ די צווײטע—פונ דער צווײטער. לאָמיר נעמענ די סיסטעמ:

$$\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 \ldots \text{גלײַכונג פונ דער צווײטער מאדרײגע} \\ 2x-y=1 \ldots \text{גלײַכונג פונ דער ערשטער מאדרײגע} \end{cases}$$

באקוועמער פונ אלצ איז לײזנ אזא סיסטעמ מ י ט נ מ י ט ל פ ו נ א ו נ ט ע ר ש ט ע ל נ אפ אזא אויפנ. פונ דער גלײַכונג פונ דער ערשטער מאדרײגע באשטימענ מיר א וואָסער ניט איז אײנ אומבאוווּסטנ, ווי א פונקציע פונ דעמ אנדערנ אומבאוווּסטנ, צומ בײַשפּיל, מיר באשטימענ y ווי א פונקציע פונ x:

$$y=2x-1.$$

דעמלט, נאָכנ אונטערשטעלנ, גיט די גלײַכונג פונ דער צווײטער מאדרײגע א גלײַכונג מיט אײנ אומבאוווּסטנ x:

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1;$$

$$x^2-4(4x^2-4x+1)+x+6x-3=1;$$

$$x^2-16x^2+16x-4+x+6x-3-1=0;$$

$$-15x^2+23x-8=0; \quad 15x^2-23x+8=0.$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4.15.8}}{2\cdot 15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30};$$

$$x_1=\frac{23+7}{30}=1; \quad x_2=\frac{23-7}{30}=\frac{8}{15}.$$

נאָכדעם געפינען מיר פון דער גלײַכונג $y = 2x - 1$:

$$y_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1; \quad y_2 = 2\cdot \frac{8}{15} - 1 = \frac{1}{15}.$$

אַט אזא אופן האָט די געגעבענע סיסטעם צוויי פּאָר לייזונגען:

$$1)\ x_1 = 1,\ y_1 = 1;\ 2)\ x_2 = \frac{8}{15},\quad y_2 = \frac{1}{15}.$$

60. קינסטלעכע מעטאָדן. דער אָנגעוויזענער מעטאָד קאָן אָנגעווענדט ווערן שטענדיק, וויבאלד איינע גלײַכונג איז פון דער ערשטער מאדרייגע; אין אייניקע פאלן קאָן מען באנוצן זיך מיט קינסטלעכע מעטאָדן, וואָס קיין אלגעמיינעם קלאל קאָן מען פאר זיי ניט אָנווײַזן. מיר וועלן ברענגען בײַשפּילן.

בײַשפּיל 1.

$$x + y = a;\ xy = b.$$

ערשטער מיטל. אזוי ווי די פאָרגעלייגטע גלײַכונגען גיבן די סומע און דעם קייפל־פּראָדוקט פון די אומבאוווסטע, דארפן x און y זײַן וואָרצלען פון א קוואדראטער גלײַכונג (§ 45):

$$z^2 - az + b = 0.$$

הייסט עס:

$$x = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b};\ y = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

צווייטער מיטל. לאָמיר דערהייבן די ערשטע גלײַכונג אין א קוואדראט און לאָמיר אראָפּנעמען פון איר די פארפירפאכטע צווייטע[1]:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \\ -4xy = -4b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b \end{array}$$

ד. ה.

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b,$$

פונוואנען:

$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}.$$

---

[1] אזוינע פראזעס נוצט מען אָפט צוליב קורצקײַט, אָנשטאָט „לאָמיר דערהייבן ביידע טיילן פון דער גלײַכונג אין קוואדראט", „לאָמיר קייפלען ביידע טיילן פון דער גלײַכונג אף 4" א. ד. ג.

איצטער האָבן מיר א סיסטעם:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}. \end{cases}$$

אז מיר וועלן צונויפלייגן און אראָפּנעמען די דאָזיקע גלײַכונגען, וועלן מיר באקומען:

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b}; \qquad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b};$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}; \qquad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

אזויווי איינע פון די געגעבענע גלײַכונגען האָבן מיר דערהייבן אין א קוואַדראט, קאָנטראָלירן מיר דורך אונטערשטעלן, צי זײַנען ניטאָ קיין זײַטיקע וואָרצלען אין דער צאָל פון די געפונענע.

אפ אזא אופן געפינען מיר, אז די דאָזיקע סיסטעם האָט צוויי פּאָר לייזונגען.

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \quad \text{און} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

די צווייטע פּאָר שיידט זיך אונטער פון דער ערשטער בלויז מיט דעם, וואָס די באדײַטונג פון דעם x אין דער ערשטער פּאָר דינט פאר דער באדײַטונג פונעם y אין דער צווייטער פּאָר, און פארקערט. דאָס האָט מען געקענט פּאָרויסזען, ווײַל די געגעבענע גלײַכונגען ענדערן זיך ניט, ווען מיר פארבײַטן x אפּן y און y אפּן x. מיר וועלן באמערקן, אז אזוינע גלײַכונגען רופן זיך **סימעטרישע**.

בײַשפּיל 2.

$$x-y=a, \qquad xy=b.$$

ערשטער מיטל. פאָרשטעלנדיק די גלײַכונגען אין דער פאָרם:

$$x+(-y)=a, \qquad x(-y)=-b,$$

באמערקן מיר, אז x און y—זײַנען וואָרצלען פון א קוואדראטער גלײַכונג:

$$z^2-az-b=0.$$

ווייסט עס, אז

$$x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}; \qquad y=-z_2=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right).$$

צווייטער מיטל. אז מיר וועלנ דערהייבנ די ערשטע גלייַכונג אינ קוואדראט אונ וועלנ זי צונויפלייגנ מיט דער פארפירטאכטער צווייטער, וועלנ מיר באקומענ:

$$(x+y)^2=a^2+4b;$$

פונוואנענ:

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}.$$

איצטער האָבנ מיר א סיסטעמ:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}, \\ x-y=a. \end{cases}$$

אז מיר וועלנ צונויפלייגנ אונ אראָפנעמענ די דאָזיקע גלייַכונגענ, וועלנ מיר געפינענ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}; \qquad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

בייַשפּיל 3.

$$x+y=a, \qquad x^2+y^2=b.$$

אז מיר וועלנ דערהייבנ די ערשטע גלייַכונג אינ קוואדראט אונ וועלנ פונ איר אראָפנעמענ די צווייטע, וועלנ מיר באקומענ:

$$2xy=a^2-b,$$

פונוואנענ:

$$xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

איצטער איז די פראגע געבראכט צומ לייזנ די סיסטעמ:

$$x+y=a, \qquad xy=\frac{a^2-b}{2},$$

וועלכע מיר האָבנ שוינ באטראכט אינ דעמ ערשטנ בייַשפּיל.

61. סיסטעמ פונ צוויי גלייַכונגענ, וואָס יעדערע פונ זיי איז פונ דער צווייטער מאדרייגע. אזא סיסטעמ אינ דער אלגעמיינער פאָרמ ווערט ניט געלייזט עלעמענטאר, ווייַל זי ווערט געבראכט צו א פערטער גלייַכונג פונ דער פערטער מאדרייגע.

לאָמיר באטראכטנ א י נ י ק ע א י י נ צ ל נ ע פ א ל נ, וועלכע מע קאָנ לייזנ אפּ אנ עלעמענטארנ אופנ.

בײַשפּיל 1.

$$x^2 + y^2 = a, \qquad xy = b.$$

ערשטער מיטל (אונטערשטעלונג). פונ דער צווייטער גלײַכונג באַשטימענ מיר איינ אומבאַוווסטנ אָפּהענגיק פונ דעם צווייטנ; צום בײַשפּיל $x = \frac{b}{y}$. לאָמיר אַרײַנשטעלנ די דאָזיקע באַדײַטונג אינ דער ערשטער גלײַכונג אונ לאָמיר זיכ באַפרײַענ פונעם דײַטער; דעמלט וועלנ מיר באַקומענ א ביקוואַדראַטע גלײַכונג: $y^4 - ay^2 + b^2 = 0$. אז מיר וועלנ זי לייזנ, וועלנ מיר געפינענ פאַרנ y פיר באַדײַטונגענ. ווענ מיר וועלנ יעדערע פונ זיי אַרײַנשטעלנ אינ דער פאָרמולע, וואָס איז פריִער אַרויסגעפירט געוואָרנ פאַרנ x, וועלנ מיר געפינענ פיר אַנטשפּרעכיקע באַדײַטונגענ פאַרנ x.

צווייטער מיטל. אז מיר וועלנ צונויפלייגנ די ערשטע גלײַכונג מיט דער געטאָפּלטער צווייטער, וועלנ מיר באַקומענ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b$$

ד. ה.

$$(x + y)^2 = a + 2b,$$

פונדאַנענ:

$$x + y = \pm\sqrt{a + 2b}.$$

אז מיר וועלנ אַראָפּנעמענ פונ דער ערשטער גלײַכונג די געטאָפּלטע צווייטע, וועלנ מיר געפינענ:

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b,$$

ד. ה.

$$(x - y)^2 = a - 2b,$$

פונדאַנענ:

$$x - y = \pm\sqrt{a - 2b}.$$

אפ אזא אויפנ ווערט די פראַגע געבראַכט צו דער לייזונג פונ פאָלגנדיקע פיר סיסטעמעס פונ דער ערשטער מאַדרייגע:

$$1) \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}; \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}; \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}; \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}; \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

יעדערע פונ זיי ווערט געלייזט זייער פאַשעט דורכ אַלגעבראַיִש צונויפלייגנ די גלײַכונגענ.

דריטער מיטל. דערהייבנדיק די צווייטע גלײַכונג אינ קוואדראט, באקומענ מיר פאָלגנדיקע סיסטעמ:

$$x^2+y^2=a,\ x^2y^2=b^2.$$

פונדאנענ איז צו זענ, אז x^2 אונ y^2 זײַנענ וואָרצלענ פונ דער קוואדראט-גלײַכונג:

$$z^2-az+b^2=0.$$

הייסט עס, אז

$$x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},\quad y^2=z_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$$

אונ

$$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}.$$

בײַשפּיל 2.

$$x^2-y^2=a,\ xy=b.$$

מיטנ מיטל פונ אונטערשטעלונג וועלנ מיר לײַכט ברענגענ די דאָזיקע סיסטעמ צו א ביקוואדראטער גלײַכונג. אָט איז נאָכ א קינסטלעכע לייזונג.

אז מיר וועלנ דערהייבנ די צווייטע גלײַכונג אינ קוואדראט, וועלנ מיר אָפּכנ די סיסטעמ:

$$x^2-y^2=a,\ x^2y^2=b^2$$

אָדער:

$$x^2+(-y^2)=a,\ x^2(-y^2)=-b^2.$$

פונדאנענ איז צו זענ, אז x^2 אונ $-y^2$ זײַנענ וואָרצלענ פונ דער גלײַכונג:

$$z^2-az-b^2=0.$$

הייסט עס, אז

$$x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2},\ y^2=-z_2=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\right).$$

פונדאנענ וועלנ מיר געפינענ x אונ y.

62. גראפישער מיטל פונ לייזונג.

אז מיר וועלנ אָנצייכענענ די גראפיקעס פאר יעדערער פונ די געגעבענע גלײַכונגענ (מיט דער הילפ פונ טאבעלעס פאר איינצלנע באדײַטונגענ פונ x אונ y), וועלנ מיר געפינענ די גרייסנ פונ די קאָאָרדינאטנ פאר די איבערשנײַד-פונקטנ פונ די דאָזיקע גראפיקעס: דאָס וועלנ עס זײַנ די וואָרצלענ פונ די גלײַכונגענ.

בײַשפּיל. לייזט די סיסטעמ:

$$1)\ y=x^2-3x+2,\quad 2)\ x=2y^2-3.$$

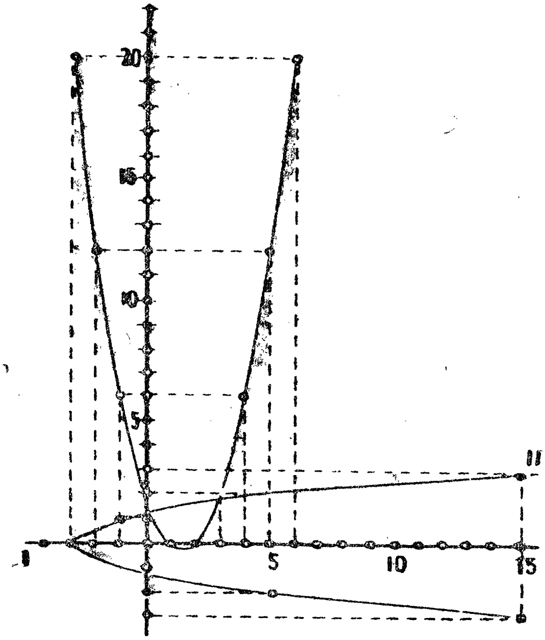
לאָמיר צונויפשטעלנ די טאבעלע פונ די איינצלנע באדײַטונגענ פונ x אונ y פאר דער ערשטער גלײַכונג:

x	0	1	2	3	4	5	...	—1	—2	—3	...
y	2	0	0	2	6	12	...	6	12	20	...

און א טאבעלע פונ די איינצלנע באדײַטונגענ פאר דער צווייטער גלײַכונג:

y	0	1	2	3	4	...	—1	—2	—3	...
x	—3	—1	5	15	29	...	—1	5	15	...

לויט די דאָזיקע באדײַטונגענ וועלנ מיר קאָנסטרויִרנ גראפיקעס (די דאָזיקע גראפיקעס וועלנ זײַנ פאראבאָלעס, צייכ. 24).



צייכ. 24.

די גראפיקעס שנײַדנ זיכ איבער אינ צוויי פונקטנ, וואָס זייערע קאָאָרדינאטנ וועלנ, אומגעפער, זײַנ: $x=0{,}3$; $y=1{,}3$ אונ $x=2{,}8$; $y=1{,}6$.

מע קאָנ געפינענ די קאָאָרדינאטנ פונ די איבערשנײַד-פונקטנ פינקטלעכער, אויב מיר וועלנ אָנצייכענענ אינ א ברייטערנ מאסשטאב יענע טיילנ פונ די גראפיקעס, וואָס ליגנ לעבנ די איבערשנײַד-פונקטנ.

געניטונגענ:

לייזט פאָלגנדיקע סיסטעמעס גלײַכונגענ:

97. $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=24; \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=a, \\ \dfrac{x}{y}=b; \end{cases}$

98. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=\dfrac{4}{3}x; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=96, \\ x-y=8; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=156, \\ x-y=6. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ (מיר וועלנ אָנעמענ $\dfrac{1}{x}=x_1$, $\dfrac{1}{x}=y_1$).

100. $\begin{cases} \dfrac{}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+6x=0 \\ y=2+3. \end{cases}$

101. $\begin{cases} 9x^2-xy+2y^2+4x=20. \\ 5x^2-11xy+2y^2=0. \end{cases}$

102. צוויי פוסגייער דארפנ דורכגײנ א וועג פונ 270 קמ. איינער פונ זיי גייט דורכ יעדער טאָג אפ 6 קמ מער, איידער דער צווייטער, אונ דעריבער גייט בא אימ אוועק אפנ גאנצנ וועג אפ $1\frac{1}{2}$ טעג ווייניקער, איידער באמ צווייטנ. פאר וויפל טעג גייט דורכ יעדערער פונ זיי דעמ גאנצנ וועג?

103. א פעלד האָט די פאָרמ פונ א גראָדעק. באשטימט זײַנ שטעכ, ווײסנדיק, אז 1) אויב מע זאָל זײַנ לענג פארקלענערנ אונ זײַנ ברייט פארגרעסערנ אפ 12 מ, וועט עס באקומענ די פאָרמ פונ א קוואדראט; 2) אויב אָבער מע זאָל די לענג פארגרעסערנ אונ די ברייט פארקלענערנ אפ 12 מ, וועט זײַנ שטעכ ווערנ 15049 מ².

104. א דיאגאָנאל פונ א גראָדווינקלדיקנ פאראלעלאָפּיפּעד, וואָס זײַנ הייכ איז גלײַכ 3 מ, באטרעפט 13 מ; דער פערימעטער פונ זײַנ באזיס איז גלײַכ צו 32 מ. געפינט די אויסמעסטונגענ פונ דעמ דאָזיקנ קערפּער.

105. אינ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק איז די היפּאָטענוזע, וואָס איז גלײַכ צו c; צעטיילט דורכ דער הייכ, וואָס איז אפ איר אראָפּגעלאָזנ, אפ 2 אָפּשניטנ, וואָס איינער פונ זיי איז גלײַכ צומ ניט בײַליגנדיקנ קאטעט. געפינט די קאטעטנ.

106. אינ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק איז די היפּאָטענוזע גלײַכ צו c אונ די סומע פונ די קאטעטנ איז גלײַכ צו s. געפינט די קאטעטנ.

פערטער אָפּטייל.

III. אומגלײַכקײַטנ.

I. אומגלײַכקײַט פונ דער ערשטער מאדרייגע.

63. **פאָרבאמערקונג.** מיר האָבנ שוינ פריִער גערעדט וועגנ דעם (זע § 24, טייל 1), אינ וואָסער זינ מע דארפ פארשטיינ די אויסדרוקנ: $a > b$ אָדער $a < b$, ווענ עס גייט די רייד וועגנ רעלאטיווע צאָלנ; נעמלעכ: דער אויסדרוק a איז גרעסער פונ b $(a > b)$ באטײַט, אז די דיפערענצ $(a - b)$ איז א פאָזיטיווע צאָל, אונ דער אויסדרוק a איז קלענער פונ $b (a < b)$ באטײַט, אז די דאָזיקע דיפערענצ איז א נעגאטיווע צאָל. איצט וועלנ מיר אויספירלעכ באטראכטנ די אייגנשאפטנ פונ די אזויגערופענע „אומגלײַכקײַטנ".

64. **גרונט־אייגנשאפטנ פונ די אומגלײַכקײַטנ.** צוויי צאָלנ אָדער צוויי אלגעבראִישע אויסדרוקנ, וועלכע זײַנענ פארייניקט צווישנ זיכ דורכ א צייכנ $>$ אָדער $<$, שטעלנ צונויפ דאָס, וואָס עס ווערט אָנגערופנ **אומגלײַכקײַט**. אזוי ווי א גלײַכקײַט, באשטייט אויכ אנ אומגלײַכקײַט פונ צוויי טיילנ: א **לינקנ** טייל אונ א **רעכטנ** טייל.

לאָמיר באצייכענענ דעם לינקנ טייל פונ דער אומגלײַכקײַט דורכנ בוכשטאב a אונ דעם רעכטנ טייל דורכנ בוכשטאב b. דעמלט קענענ מיר די גרונט־אייגנשאפטנ פונ די אומגלײַכקײַטנ אויסדריקנ אזוי:

1) אויב

$$a > b$$

איז

$$b < a;$$

צום בײַשפּיל:

$$-2 > -3.$$

אָבער

$$-3 < -2.$$

2) אויב

$$a > b$$

אונ

$$b > c,$$

איז

$$a > c;$$

צום בײַשפּיל:

$$-2 > -3$$

און

$$-3 > -4;$$

דעמלט איז

$$-2 > -4.$$

3) אויב

$$a > b$$

און

$$c = d,$$

איז

$$a + c > b + d$$

און

$$a - c > b - d$$

ד. ה., װען מיר גיבן צו צו ניט קײן גלײַכע צאָלן אָדער מיר נעמען אראָפּ פון זײ גלײַכע צאָלן, ענדערט זיך ניט דער צײכן פון אומגלײַכקײַט (ד. ה. די גרעסערע צאָל בלײַבט גרעסער). צום בײַשפּיל:

$$2 > -3;$$

לאָמיר צוגעבן אָדער אראָפּנעמען צו -10:

$$2 + (-10) > -3 + (-10),$$

ד. ה.

$$-8 > -13;$$

$$2 - (-10) > -3 - (-10),$$

ד. ה.

$$12 > 7.$$

4) אויב

$$a > b$$

און

$$c > d,$$

איז

$$a + c > b + d;$$

אפ דעם זעלבן אופן, אויב

$$a < b$$

און

$$c < d,$$

איז

$$a + c < b + d;$$

צום בײַשפּיל, װען מיר לײגן צונױף גלידערװײַז די טײלן פֿון די צװײ אומגלײַכקײטן:

$$-7 > -10$$

און

$$-3 > -4$$

באַקומען מיר:

$$-10 > -14.$$

פּונקט אַזױ, װען מיר זאָלן צונױפֿלײגן גלידערװײַז די טײלן פֿון די אומגלײַכקײטן:

$$2 < 8$$

און

$$-4 < -2$$

װעלן מיר האָבן:

$$-2 < 6.$$

5) אויב

$$a > b$$

און

$$c < d,$$

איז

$$a - c > b - d;$$

אָדער אויב

$$a < b$$

און

$$c > d,$$

איז

$$a - c < b - d.$$

צום בײַשפּיל:

$$-\begin{cases} -8 > -10 \\ \quad 2 < \quad 3 \end{cases}$$
$$\overline{-6 > -13}$$

אָדער

$$-\begin{cases} 7 < \quad 12 \\ 8 > -2 \end{cases}$$
$$\overline{-1 < 14}.$$

לאָמיר אָפּמאַכן צו רײדן װעגן צװײ אומגלײַכקײטן, אַז זײ זײַנען פֿון אַ גלײַכן באַדײַט, אויב אין יעדערער פֿון זײ שטײט דער צײכן $<$ אָדער $>$, און אַז זײ זײַנען פֿון קעגנזײַטלעכן באַדײַט, אויב אין אײנער פֿון די אומגלײַכקײטן

שטייט דער צייכנ $<$, אונ אינ דער צווייטער דער צייכנ $>$. דעמלט קאָנ מענ די פערטע אייגנשאפט אונ די פינפטע ארויסזאָגנ אזוי:

צוויי אומגלײַכקײַטנ פונ גלײַכנ באדײַט קאָנ מענ צונויפלייגנ גלידערווײַז; צוויי אומגלײַכקײַטנ פונ קעגנזוצלעכנ באדײַט קאָנ מענ גלידערווײַז אראָפנעמענ, איבער־לאָזנדיק דעמ צייכנ פונ יענער אומגלײַכקײַט, פונ וועלכער עס איז אראָפגענומענ געוואָרנ די צווייטע אומגלײַכקײַט.

6) אויב $a < b$ אונ m איז א פּאָזיטיווע צאָל, איז $am > bm$ אונ $.a : m > b : m$

אויב מיר קייפלענ אָדער טיילנביידע טיילנ פונ דער אומגלײַכקײַט אפ דער זעלביקער פּאָזיטיווער צאָל, ענדערט זיכ ניט דער צייכנ פונ אומגלײַכקײַט.

צומ בײַשפּיל, ווענ מיר קייפלענ אפ $+4$ די טיילנ פונ דער אומגלײַכקײַט

$$-5 > -7,$$

באקומענ מיר:

$$-20 > -28.$$

7) אויב $a > b$ אונ m איז א נעגאטיווע צאָל, איז $am < bm$ אונ $.a : m < b : m$

אויב מיר קייפלענ אָדער טיילנ ביידע טיילנ פונ אנ אומגלײַכקײַט אפ דער זעלביקער נעגאטיווער צאָל, ענדערט זיכ דער צייכנ פונ דער אומגלײַכקײַט אפ א קעגנזוצלעכנ.

צומ בײַשפּיל, ווענ מיר קייפלענ אפ -1 ביידע טיילנ פונ דער אומגלײַכקײַט

$$-5 > -7$$

באקומענ מיר:

$$.5 < 7$$

65. צווייערליי פראגנ בענעגייע אומגלײַכקײַטנ. בענעגייע אומגלײַכקײַטנ (אויכ גלײַכקײַטנ), וואָס אנטהאלטנ בוכשטאבנ, זײַנענ מעגלעכ צווייערליי פראגנ:

1) לייזנ אנ אומגלײַכקײַט, וואָס אנטהאלט אומבאוווּסטע, ד. ה. באשטימענ, צווישנ וועלכע גרענעצנ עס דארפנ זיכ געפינענ די צאָל־באטרעפנ פונ די אומבאוווּסטע, קעדיי די אומגלײַכקײַט זאָל זײַנ ריכטיק, ד. ה. מע דארפ באשטימענ, מער פונ וואָס אָדער ווייניקער פונ וואָס עס דארפנ זײַנ די דאָזיקע באטרעפנ פונ די אומבאוווּסטע.

2) באווײַזנ די אידענטישקײַט פונ אנ אומגלײַכקײַט, ד. ה. אופדעקנ די ריכטיקײַט אירע בא אלע מעגלעכע באטרעפנ פונ די בוכשטאבנ אָדער, ווייניקסטנס, בא באטרעפנ, וואָס זײַנענ באגרענעצט דורכ אפריער פארגעבענע באדינגונגענ.

די לייזונג פון ביידע פראגן באזירט זיך אף אייניקע אייגנשאפטן פון די אומ־גלייכקייטן, ענלעך צו יענע, וועלכע דינען פאר א גרונט אף צו לייזן גלייכונגען.

66. **גלייכבאטרעפיקע אומגלייכקייטן.** אומגלייכקייטן, וועלכע אנטהאלטן איינע און די זעלביקע אומבאוווסטע, ווערן אָנגערופן גלייכבאטרעפיקע, אויב עס באפרידיקן זיי די זעלביקע באטרעפן פון די דאָזיקע אומבאוווסטע; צום ביישפּיל: די צוויי אומגלייכקייטן

$$3x+2<x+10$$

און

$$3x<x+8$$

זיינען גלייכבאטרעפיק, ווייל ביידע באפרידיקן זיי די באטרעפן פונעם x, וואָס זיינען קלענער פון 4, און בלויז די דאָזיקע באטרעפן.

בענוגייע דער גלייכבאטרעפיקייט פון די אומגלייכקייטן וועלן מיר דערווייזן טעאָרעמעס, וואָס זיינען זייער ענלעך צו אנטשפרעכיקע טעאָרעמעס בענוגייע דער גלייכבאטרעפיקייט פון גלייכונגען.

67. **טעאָרעמע 1.** <u>אויב מיר זאָלן צו ביידע טיילן פון אן אומגלייכקייט (וואָס אנטהאלט אומבאוווסטע) צוגעבן (אָדער אראָפּנעמען) די זעלביקע צאָל, באַ־קומען מיר א נייע אומגלייכקייט, וואָס איז גלייכבאטרעפיק מיט דער ערשטער.</u>

לאָמיר באצייכענען דעם לינקן טייל פון דער אומגלייכקייט, וועלכע אנטהאלט אומבאוווסטע, דורך איין בוכשטאב A און דעם רעכטן טייל—דורך א צווייטן בוכשטאב B, און זאָל זיין m א באליביקע צאָל; וועלן מיר דערווייזן, אז די צוויי אומגלייכקייטן:

$$A>B \tag{1}$$

און

$$A+m>B+m \tag{2}$$

זיינען גלייכבאטרעפיק. לאָמיר זאָגן, אז די ערשטע אומגלייכקייט באפרידיקט זיך בא געוויסע באטרעפן פון די בוכשטאבן. דאָס באטייט, אז בא די דאָזיקע באטרעפן ווערט די צאָלגרייס A גרעסער, איידער די צאָלגרייס B; אָבער דעמלט בא די זעלביקע באטרעפן פון די בוכשטאבן ווערט אויך די צאָלגרייס פון דער סומע $A+m$ גרעסער פון דער צאָלגרייס פון דער סומע $B+m$, ווייל אויב מיר דערלייגן צו ביידע טיילן פון אן אומגלייכקייט גלייכע גרייסן, פארענדערט זיך ניט דער צייכן פון אומגלייכקייט. הייסט דאָס, אז יעטווידער לייזונג פון דער אומגלייכקייט (1) געהערט אויך דער אומגלייכקייט (2).

פארקערט, אויב בא געוויסע באטרעפן פון די בוכשטאבן ווערט די צאָלגרייס פון דער סומע $A+m$ גרעסער פון דער צאָלגרייס פון דער סומע $B+m$, ווערט בא די זעלביקע באטרעפן פון די בוכשטאבן די צאָלגרייס A גרעסער פון דער צאָלגרייס B (אויב מיר נעמען אראָפּ פון ביידע טיילן פון אן אומגלייכקייט גלייכע גרייסן, איז...); פאָלגלעך, באפרידיקן אלע לייזונגען פון דער אומגלייכקייט (2) אויך די אומגלייכקייט (1); הייסט דאָס, אז די דאָזיקע אומגלייכקייטן זיינען גלייכ־באטרעפיק.

אריבערגייענדיק פונ דער אומגלײַכקײַט (2) צו דער אומגלײַכקײַט (1), באַ־מערקנ מיר, אַז פונ ביידע טיילנ פונ דער אומגלײַכקײַט קאָנ מענ אראָפּנעמענ די זעלביקע צאָל.

אויספיר. יעטווידער גליד פונ אנ אומגלײַכקײַט קאָנ מענ אריבערטראָגנ פונ איינ טייל אינ צווייטנ מיט א פּארקערטנ צייכנ.

אויב, צום בײַשפּיל, מיר האָבנ אנ אומגלײַכקײַט:

$$A > B + C$$

אונ נעמענ אראָפּ פונ ביידע טיילנ צו C, באַקומענ מיר:

$$A - C > B.$$

68. טעאָרעמע 2. אויב מיר זאָלנ ביידע טיילנ פונ אנ אומגלײַכקײַט (וואָס אנטהאלט אומבאַוווסטע) קייפלענ (אָדער טיילנ) אפּ דער זעלביקער פּאָזיטיווער צאָל, באַקומענ מיר א נײַע אומגלײַכקײַט, וועלכע איז גלײַכבאַטרעפיק מיט דער ערשטער.

לאָמיר באַווײַזנ, אַז די צוויי אומגלײַכקײַטנ:

$$A > B \tag{1}$$

און

$$Am > Bm \tag{2}$$

זײַנענ גלײַכבאַטרעפיק, אויב נאָר m איז א פּאָזיטיווע צאָל.

לאָמיר אָנעמענ, אַז בא געוויסע באַטרעפנ פונ די אומבאַוווסטע ווערט די צאָל־גרייס A גרעסער פונ דער צאָלגרייס B; דעמלט ווערט אויכ בא די זעלביקע באַטרעפנ פונ די אומבאַוווסטע די צאָלגרייס פונעם פּראָדוקט Am גרעסער פונ דער צאָלגרייס פונעם פּראָדוקט Bm, ווײַל פונ קייפלענ ביידע טיילנ פונ דער אומגלײַכ־קײַט אפּ א פּאָזיטיווער צאָל ענדערט זיכ ניט, ווי מיר ווייסנ, דער צייכנ פונ אומ־גלײַכקײַט. הייסט דאָס, אַז אלע לייזונגענ פונ דער אומגלײַכקײַט (1) באַפרידיקנ אויכ די אומגלײַכקײַט (2).

פּאַרקערט, אויב בא געוויסע באַטרעפנ פונ די בוכשטאַבנ ווערט די צאָלגרייס Am גרעסער פונ דער צאָלגרייט Bm, ווערט אויכ בא די זעלביקע באַטרעפנ פונ די בוכשטאַבנ די צאָלגרייס A גרעסער פונ דער צאָלגרייס B, ווײַל פונ טיילנ ביידע טיילנ פונ אנ אומגלײַכקײַט אפּ א פּאָזיטיווער צאָל ענדערט זיכ ניט דער צייכנ פונ אומגלײַכקײַט.

באַמערקונג. די פּאָזיטיווע צאָל, אפּ וועלכער, לויט ווי מיר האָבנ דערוויזנ, מיר האָבנ רעכט צו קייפלענ אָדער טיילנ ביידע טיילנ פונ אנ אומגלײַכקײַט (ניט ענדערנדיק איר צייכנ), קאָנ געגעבנ ווערנ אינ דער פאָרם פונ א בוכשטאַביקנ אויסדרוק, דערבײַ קאָנ דער דאָזיקער אויסדרוק אנטהאלטנ אינ זיכ אויכ די אומבאַוווסטע, וואָס גייענ ארײַנ אינ דער אומגלײַכקײַט. אָבער דערבײַ דאַרפ מענ באַזונדער באַטראַכטנ, צי בלײַבט דער דאָזיקער אויסדרוק א פּאָזיטיווע צאָל בא אלע באַטרעפנ פונ די בוכשטאַבנ, וואָס גייענ ארײַנ אינ דעם אויסדרוק, אפּ וועלכנ מיר קייפלענ אָדער טיילנ ביידע טיילנ פונ דער אומגלײַכקײַט.

צום בײַשפּיל, מיר קײפלענ בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײַט $A > B$ אפנ אויסדרוק $(x-5)^2$:

$$A > B; \qquad (1)$$

$$A(x-5)^2 > B(x-5)^2. \qquad (2)$$

דער קײפלער $(x-5)^2$ בלײַבט א פּאָזיטיװע צאָל בא אלע באטרעפנ פונעמ x, כוץ אײנעמ: $x=5$. הײסט דאָס, די אומגלײַכקײַטנ (1) אונ (2) זײַנענ גלײַכ-באטרעפיק אינ דעמ פאל, אויב די ערשטע פונ זײ באפרידיקט זיכ ניט מיטנ באטרעפ $x=5$; אינ קעגנפאל װידער האָט די אומגלײַכקײַט (1), באפרידיקנדיק זיכ מיט אלע לײזונגענ פונ דער אומגלײַכקײַט (2), נאָכ אנ אײגענע באזונ-דערע לײזונג: $x=5$ (די דאָזיקע לײזונג באפרידיקט, פארשטײט זיכ, ניט די אומגלײַכקײַט (2).

אויספיר. אויב בײדע טײלנ פונ אנ אומגלײַכקײַט אנטהאלטנ א פּאָזיטיװנ געמײנזאמענ קײפלער, קאָנ מענ אפ אימ צעטײלנ בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײַט.

צום בײַשפּיל, אינ בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײַט:

$$(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$$

איז פאראנ א געמײנזאמער קײפלער $(x-5)^2$. דער דאָזיקער קײפלער װערט בא $x=5$ פארװאנדלט אינ 0, אונ בא אלע אנדערע באטרעפנ פונעמ x איז ער א פּאָזיטיװע צאָל. די לײזונג $x=5$ באפרידיקט ניט די געגעבענע אומגלײַכקײַט. װענ מיר װילנ זענ, צי באפרידיקט זי זיכ בא אנדערע באטרעפנ פונעמ x, קאָנענ מיר צעטײלנ בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײַט אפ $(x-5)^2$, אלט אפ א פּאָזי-טיװער צאָל; נאָכנ צעטײלנ באקומענ מיר:

$$x-1 > 3-x.$$

אלע באטרעפנ פונעמ x, װעלכע באפרידיקנ די דאָזיקע אומגלײַכקײַט, כוץ $x=5$, באפרידיקנ אויכ די געגעבענע אומגלײַכקײַט.

69. טעאָרעמע. אויב מיר זאָלנ בײדע טײלנ פונ אנ אומגלײַכקײַט (װאָס אנטהאלט אומבאװוסטע) קײפלענ (אָדער טײלנ) אפ דער זעלביקער נעגאטיװער צאָל אונ דערבײַ ענדערנ דעמ צײכנ פונ דער אומגלײַכקײַט אפ א פארקערטנ, באקומענ מיר א נײַע אומגלײַכקײַט, װאָס איז גלײַכבאטרעפיק מיט דער ערשטער.

די דאָזיקע טעאָרעמע װערט דערװיזנ פונקט אזוי, װי די טעאָרעמע 2; מע דארפ בלויז נעמענ אינ אכט, אז פונ קײפלענ אָדער טײלנ בײדע טײלנ פונ אנ אומגלײַכ-קײַט אפ א נעגאטיװער צאָל פארענדערט זיכ דער צײכנ פונ אומגלײַכקײַט אפ א קעגנזעצלעכנ.

װעגנ דער דאָזיקער טעאָרעמע קאָנ מענ ארויסזאָגנ פונקט אזא באמערקונג, װי מיר האָבנ געמאכט בענעגײע דער טעאָרעמע 2.

אויספירנ. א) װענ מיר בײַטנ איבער בא אלע טײלנ פונ אנ אומגלײַכקײט די צײכנס אפ קעגנזעצלעכע (ד. ה., װענ מיר קײפלענ בײדע טײלנ אירע אפ 1—), מוזנ מיר אויכ איבערבײַטנ דעמ צײכנ פונ אומגלײַכקײט אפ א קעגנזעצלעכנ.

ב) מע קאָנ ניט קײפלענ בײדע טײלנ פונ אנ אומגלײַכקײט· אפ א בוכשטאביקנ קײפלער, װאָס דער צײכנ זײַנער איז ניט באװוסט.

ג) אנ אומגלײַכקײט מיט ברוכצאָליקע גלידער קאָנ מענ דערפירנ צו א גאנצער פאָרמ. לאָמיר, צומ בײַשפּיל, נעמענ אזא אומגלײַכקײט:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \tag{1}$$

לאָמיר אריבערטראָגנ אלע גלידער אינ לינקנ טײל אונ ברענגענ זײ צו א געמײנזאמענ דײַמער:

$$\frac{AD - BC}{BD} > 0. \tag{2}$$

אויב BD איז א פּאָזיטיװע צאָל, קאָנענ מיר זי אָפּװארפנ, ניט ענדערנדיק דעמ צײכנ פונ אומגלײַכקײט, דערפאר װאָס אָפּװארפנ BD איז אלצײנס, װי קײפלענ אפ דער פּאָזיקער צאָל בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײט. אָפּװארפנדיק BD, באקומענ מיר אנ אומגלײַכקײט, װאָס אנטהאלט ניט קײנ ברוכצאָלנ:

$$AD - BC > 0.$$

אויב BD איז א נעגאטיװע צאָל, קאָנענ מיר זי אָפּװארפנ, איבערבײַטנדיק דערבײַ דעמ צײכנ פונ אומגלײַכקײט אפ א קעגנזעצלעכנ; דעמלט װעלנ מיר װידער האָבנ אנ אומגלײַכקײט מיט גאנצע גלידער:

$$AD - BC < 0.$$

אויב אָבער דער צײכנ פונ BD איז ניט באװוסט (װאָס עס קומט פאָר ביכלאל דעמלט, װענ B אונ D אנטהאלטנ אומבאװוסטע), קאָנענ מיר ניט קײפלענ בײדע טײלנ פונ דער אומגלײַכקײט אפ BD. דעמלט באהאנדלענ מיר דאָס אזוי: קעדײ א ברוכצאָל זאָל זײַנ א פּאָזיטיװע, איז נײטיק אונ גענוג, אז דער צײלער אונ דײַמער זאָלנ בא איר זײַנ אײנצײַטיק אָדער פּאָזיטיװע, אָדער נעגאטיװע. פאָלגלעכ, װעט זיכ די אומגלײַכקײט (2) באפרידיקנ בא אזא באטרעפ פונ די בוכשטאבנ, בא װעלכנ:

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{אָדער} \quad \begin{cases} AD - BC < 0 \\ BD < 0. \end{cases}$$

אפ אזא אופנ איז די לײזונג פונ דער אומגלײַכקײט (1) א לײזונג פונ א סיסטעמ פונ צװײ אומגלײַכקײטנ, װעלכע אנטהאלטנ ניט קײנ דײַמערס.

70. באװײַז פונ אנ אומגלײַכקײט. מע קאָנ ניט פעסטשטעלנ קײנ װעלכע עס איז אלגעמײנע קלאָלימ אפ אופדעקנ די ריכטיקײט פונ א פאָרגעלײגטער אומגלײַכקײט. מיר װעלנ בלויז באמערקנ, אז אײנער פונ די גאנגענ באשטײט אינ דעמ, װאָס מע ענדערט אומ די געגעבענע אומגלײַכקײט אינ א צװײטער—א בוילע-

טער, און דערנאָך, אַרויסגייענדיק פון דער דאָזיקער בוילעטער אומגלײַכקײַט, דער־גייט מען דורך לאָגישע שלוסן צו דער געגעבענער. מירן ברענגען אַ בײַשפּיל:

באַווײַזט, אַז אויב די סומע פון די פּאַרענדערלעכע צאָלן x און y בלײַבט אַ שטענדיקע, וועט זייער קייפּל־פּראָדוקט זײַן דער גרעסטער בײַ דער גלײַכקײַט פון די דאָזיקע צאָלן.

לאָמיר אָננעמען, אַז

$$x+y=a,$$

וו a איז אַ שטענדיקע צאָל. אויב $x=y$, דעמאָלט איז יעדערע פון די דאָזיקע צאָלן גלײַך $\frac{a}{2}$ און xy ווערט דעמאָלט גלײַך $\frac{a^2}{4}$.

עס פאָדערט זיך צו באַווײַזן, אַז אויב $x \neq y$, איז

$$xy < \frac{a^2}{4}.$$

מיר ענדערן אום די דאָזיקע אומגלײַכקײַט אַף אַזאַ אויפן:

$$xy < \frac{a^2}{4};\ 4xy < a^2;\ 4xy < (x+y)^2;$$
$$4xy < x^2+2xy+y^2;\ 0 < x^2-2xy+y^2;$$
$$0 < (x-y)^2.$$

בײַ ניט קיין גלײַכע x און y איז די לעצטע אומגלײַכקײַט באַשײַנפּערלעך ריכטיק. אַריבערגייענדיק פון איר בעהאַדראָגעדיק צו די פריערדיקע אומגלײַכקײַטן, באַמערקן מיר, אַז זיי זײַנען אַלע גלײַכבאַטרעפיק. הייסט דאָס, אַז אויך די ערשטע אומגלײַכקײַט איז ריכטיק.

אויב, צום בײַשפּיל,

$$x+y=10,$$

איז די גרעסטע גרייס פונעם קייפּל־פּראָדוקט

$$5 \cdot 5=25.$$

71. לייזונג פון אַן אומגלײַכקײַט פון דער ערשטער מאַדרייגע מיט אײן אומבאַוווּסטן.

די אַלגעמײנע פאָרם פון אַן אומגלײַכקײַט פון ערשטער מאַדרייגע מיט איין אומבאַוווּסטן, נאָכן עפענען אין איר די קלאַמערן און באַפרײַען זי פון ברוכצאָליקע גלידער, איז פאָלגנדיקע:

$$ax+b > a_1x+b_1.$$

אַריבערטראָגנדיק די אומבאַוווּסטע גלידער אין לינקן טייל און די באַוווּסטע אין רעכטן, באַקומען מיר:

$$(a-a_1)x > b_1-b.$$

ווען $a - a_1 > 0$, איז, צעטיילנדיק אַף $a - a_1$, ביידע טיילן פֿון דער אומגלײַכ־קײַט, געפֿינען מיר:

$$x > \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

אויב אָבער $a - a_1 < 0$, באַקומען מיר:

$$x < \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

אַף אַזאַ אופֿן גיט איין אומגלײַכקײַט פֿון דער ערשטער מאַדרייגע פֿאַר דעם אומבאַוווּסטן איין גרענעץ, וואָס באַגרענעצט דעם באַטרעף פֿון דעם אומבאַוווּסטן אָדער פֿון ויבן $(x < m)$, אָדער פֿון ונטן $(x > m)$. דעריבער געהערן די פֿראַגן, וואָס זייער לייזונג ווערט דערפֿירט צו אַ לייזונג פֿון איין אומגלײַכקײַט פֿון ערשטער מאַדרייגע, צו די אומבאַשטימטע פֿראַגן.

ביישפּיל. לייזט די אומגלײַכקײַט:

$$2x(2x - 5) - 27 < (2x + 1)^2.$$

עפֿענען מיר די קלאַמערן:

$$4x^2 - 10x - 27 < 4x^2 + 4x + 1.$$

טראָגן מיר איבער די גלידער און מאַכן אַ צונויפֿגיסונג:

$$-14x < 28.$$

מיר טיילן ביידע טיילן אַף -14;

$$x > -2.$$

72. צוויי אומגלײַכקײַטן פֿון דער ערשטער מאַדרייגע מיט איין אומבאַוווּסטן.

אָפֿטמאָל טרעפֿט זיך, אַז די פֿראַגע ווערט דערפֿירט צו אַ לייזונג פֿון צוויי אומגלײַכקײַטן:

$$ax + b > a'x + b \text{ און } cx + d > c'x + d'.$$

ווען מיר לייזן די דאָזיקע אומגלײַכקײַטן, באַקומען מיר פֿון יעדערער צו איין גרענעץ פֿאַר אַן אומבאַוווּסטן. דערבײַ קאָנען פֿאָרקומען דרײַ פֿאַלן:

1) גרענעצן פֿון גלײַכן באַטרעף; דעמלט איז גענוג צו נעמען איינעם פֿון זיי. אויב, צום בײַשפּיל, $x > 7$ און $x > 12$, איז גענוג צו נעמען בלויז $x > 12$, ווײַל אויב $x > 12$, איז דאָך שוין געוויס $x > 7$; אָדער אויב, צום בײַשפּיל, $x < 5$ און $x < 8$, איז גענוג אָנצונעמען, אַז $x < 5$, ווײַל דעמלט איז דאָך שוין געוויס $x < 8$.

2) גרענעצן פֿון קעגנזעצלעכן באַטרעף; צום בײַשפּיל, $x > 10$ און $x < 15$. אין דעם פֿאַל קאָן מען פֿאַר דער אומבאַוווּסטער נעמען בלויז אַזוינע באַטרעפֿן, וועלכע געפֿינען זיך צווישן די געפֿונענע גרענעצן.

3) די גרענעצן ווידערשפּרעכן איינער דעם צווייטן: $x < 5$ און $x > 7$. אין דעם פֿאַל זײַנען די אומגלײַכקײַטן, איינע געוומען, ניט מעגלעך.

ביישפּיל. לייזט צוויי אומגלייכקייטן:

$$\frac{3}{10}x+5<\frac{1}{2}x$$

און

$$5x<60+2x$$

די ערשטע אומגלייכקייט גיט $x>25$, די צווייטע: $x<20$. הייסט דאָס, אז די דאָזיקע אומגלייכקייטן זיינען אומעגלעך ווי א סיסטעם.

געניטונגען.

לייזט פאָלגנדיקע אומגלייכקייטן:

107. $x-7<2x+5$; $9x-8+3(x-2)<2(x+3)$.

108. $\frac{2x}{5}+4>x-\frac{1}{2}$; $x+2b<16-3(x-2b)$.

109. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab}$; $10-\frac{5x}{2}>0$.

110. אויב $a>b$ און $c=d$, צי איז דעמלט שטענדיק $ac>bd$?

111. אויב $a>b$, צי איז דעמלט שטענדיק $a^m>b^m$?

112. וואָס קאָן מען ארויסזאָגן וועגן די צאָלן a און b, אויב עס איז באוווּסט, אז $ab>0$? און אויב $ab<0$?

213. פירט ארויס דעם באדינג, בא וועלכן די ברוכצאָל $\frac{a}{b}$ פארגרעסערט זיך, אויב מיר גיבן צו צום ציילער און צום דײַטער די זעלביקע פאָזיטיווע צאָל (a און b זיינען אויך פאָזיטיווע צאָלן).

פינפטער אָפטייל.

פראָגרעסיעס.

I. אריפמעטישע פראָגרעסיע.

73. אופגאבע. מע האָט באשטעלט אנ ארבעטער אויסצוגראָבנ א ברונעמ אונ מע האָט זיכ באדונגענ צו צאָלנ אימ פארנ ערשטנ מעטער די טיפ 3 ר., פארנ צווייטנ — 5 רוב. א. א. וו., פארגרעסערנדיק דאָס געצאָלט פאר יעדער ווײַטערדיקנ מעטער אפ 2 רוב. וויפל האָט מענ באצאָלט דעמ ארבעטער, אויב ער האָט אויסגעגראָבנ דעמ ברונעמ אפ 10 מ די טיפ?

קעדיי צו לייזנ די אופגאבע, דארפ מענ געפינענ די סומע פונ אזוינע צאָלנ:

$$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21.$$

די דאָזיקע סומע קאָנענ מיר געפינענ פאָשעטער, איידער דורכ געוויינלעכנ כיבער. באצייכענענדיק זי מיטנ בוכשטאב s, לאָמיר אָנשרײַבנ אזוינע צוויי שורעס:

$$s=3+5+7+9+11+13+15+17+19+21,$$
$$s=21+19+17+15+13+11+9+7+5+3.$$

די צווייטע שורע האָבנ מיר אָנגעשריבנ, איבערשטעלנדיק די כיבערצאָלנ פונ דער ערשטער שורע אינ דער פארקערטער אָרדענונג, וואָס פונ דעמ האָט זיכ, פארשטייט זיכ, די סומע ניט געענדערט. לאָמיר איצטער צונויפלייגנ אלע צאָלנ, וואָס שטייענ איינע אונטער די אנדערע:

$$2s=24+24+24+24+24+24+24+24+24+24,$$

ד. ה.

$$2s=24\cdot 10=240,$$

אונ, הייסט עס,

$$s=\frac{240}{2}=120.$$

אזוי ארומ איז פאר דער גאנצער ארבעט אויסגעקומענ צו באצאָלנ 120 רובל.

אינ דער דאָזיקער אופגאבע איז אונדז אויסגעקומענ צו האָבנ צו טאָנ מיט א ריי צאָלנ, וואָס שטײַגנ בעהאדראָגעדיק אפ איינער אונ דער זעלביקער צאָל. אזוינע רייענ טראָגנ דעמ נאָמענ **א ר י פ מ ע ט י ש ע פ ר אָ ג ר ע ס י ע ס**.

74. דעפיניציע. אריפמעטישע פּראָגרעסיע רופט זיך אזא ריי צאָלן, אין וועלכער יעדער צאָל, אָנהייבנדיק פון דער צווייטער, איז גלײַך צו דער פריקער, צונויפגעלייגט מיט איינער און דער זעלביקער פאר דער געגעבענער ריי שטענדיקער צאָל (פּאָזיטיווער אָדער נעגאַטיווער).

צום בײַשפּיל, די צוויי רייען צאָלן:

$$10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34,\ 38,\ 42,\ 46;$$
$$6,\ 4,\ 2,\ 0, -2, -4, -6$$

שטעלן מיט זיך פאָר אריפמעטישע פּראָגרעסיעס, ווײַל יעטווידער צאָל אין זיי, אָנהייבנדיק פון דער צווייטער, איז גלײַך צו דער פריקער צאָל, צונויפגעלייגט אין דער ערשטער ריי מיט דער פּאָזיטיווער צאָל 4, און אין דער צווייטער — מיט דער נעגאַטיווער צאָל —2.

די צאָלן, וואָס שטעלן צונויף די פּראָגרעסיע, רופן זיך אירע **גלידער**. די פּאָזיטיווע אָדער נעגאַטיווע צאָל, וואָס מע דארף צוגעבן צום פריקן גליד, קעדיי צו באקומען דעם ווײַטערדיקן, רופט זיך די **דיפערענץ** פון דער פּראָגרעסיע.

די פּראָגרעסיע רופט זיך **שטײַגנדיקע** אָדער **פאלנדיקע**, אָפּהענגיק פון דעם, צי פארגרעסערן זיך אירע גלידער באַם דערווײַטערן זיך פון אָנהייב ריי אָדער זיי פארקלענערן זיך; די דיפערענץ פון א שטײַגנדיקער פּראָגרעסיע איז א פּאָזיטיווע צאָל, און פון א פאלנדיקער — א נעגאַטיווע.

קעדיי צו באצייכענען, אז די ריי שטעלט מיט זיך פאָר אן אריפמעטישע פּראָגרעסיע, שטעלט מען אנאנדערשמאָל אין אָנהייב ריי דעם צייכן ÷.

געוויינלעך איז אָנגענומען צו באצייכענען: ערשטער גליד a, לעצטער l, דיפערענץ d, צאָל פון אלע גלידער n און זייער סומע s [1].

צוליב קורצקײַט וועלן מיר די ווערטער „אריפמעטישע פּראָגרעסיע" שרײַבן פארקירצט אזוי: אר. פּר.

75. פאָרמולע פון יעטווידער גליד פון אן אריפמעטישער פּראָגרעסיע. לאָמיר האָבן די פּראָגרעסיע:

$$\div 10,\ 14,\ 18 \ldots \text{(דיפערענץ 4)}$$

דעמלט איז:

גליד 2־טער $= 10 + 4 = 14;$
„ 3־טער $= 10 + 4 + 4 = 10 + 4 \cdot 2 = 18;$
„ 4־טער $= 10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4 \cdot 3 = 22;$

א. א. וו.

הייסט עס, אז

גליד 10־טער $= 10 + 4 \cdot 9 = 46;$
„ 20־טער $= 10 + 4 \cdot 19 = 86$

א. א. וו.

---

[1] אין אייניקע ביכער ווערן די גלידער פון דער פּראָגרעסיע באצייכנט אויך אזוי:
$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1},\ a_n$.
די דיפערענץ פון דער פּראָגרעסיע ווערט אנאנדערשמאָל באצייכנט דורך r.

פונקט איז, אויב מיר האָבן א פראָגרעסיע

$\div\, 6, 4, 2 \ldots$ (דיפערענץ -2)

איז

2טער גליד $=6+(-2)=4$;

3־טער „ $=6+(-2)+(-2)=6+(-2)\cdot 2=2$

א. א. וו.

צום ביישפיל:

10־טער גליד $=6+(-2)\cdot 9=-12$.

בכלל, אויב די פראָגרעסיע וועט זיין אזא:

$\div\, a, b, c \ldots$ (דיפערענץ d),

איז

2־טער גליד $=a+d$;

3־טער „ $=a+d+d=a+2d$;

4־טער „ $=a+2d+d=a+3d$

א. א. וו.

הייסט עס, אז דער 10־טער גליד וועט זיין $a+9d$, דער 15־טער גליד וועט זיין $a+14d$, בכלל, דער m־טער גליד וועט זיין $a+d(m-1)$. אפ אזא אויפן איז:

יעטווידער גליד פון אן אריפמעטישער פראָגרעסיע איז גלייך צו איר ערשטן גליד, צונויפגעלייגט מיטן קייפל־פראָדוקט פון דער דיפערענץ פון דער פראָגרעסיע אפ דער צאָל גלידער, וואָס גייט פאר יענעם גליד, וועלכער ווערט באשטימט.

דער לעצטער גליד איז גלייך צום ערשטן, צונויפגעלייגט מיטן קייפל־פראָדוקט פון דער דיפערענץ אפ דער צאָל פון אלע גלידער, פארקלענערט אפ 1, ד. ה.:

$$l=a+d(n-1).$$

ביישפילן.

1) געפינט דעם 10־טן גליד פון דער פראָגרעסיע:

$\div\, 60,\ 75,\ 90 \ldots$

אזוי ווי די דיפערענץ פון דער דאָזיקער פראָגרעסיע איז גלייך צו 15, וועט דער 10־טער גליד זיין:

$$60+15\cdot 9=195.$$

2) געפינט דעם 12־טן גליד פון דער פראָגרעסיע:

$\div\, 40,\ 37,\ 34 \ldots$

אזוי ווי די דיפערענץ איז דאָ גלייך צו -3, דארף דער 12־טער גליד זיין:

$$40+(-3)\cdot 11=40-33=7.$$

3) א װאָסערע װעט זײַנ די n־טע צאָל אינ א נאָכאנאנדיקער רײ אומגראָדע צאָלנ:

$$1,\ 3,\ 5 \ldots ?$$

אזא צאָל דארפ זײַנ:

$$1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1.$$

אױספיר. אנ אר. פר., װאָס דער ערשטער גליד איז בא איר a, די דיפערענצ d אונ די צאָל גלידער n, קאָנ מענ פאָרשטעלנ אזױ:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d \ldots a+d(n-1).$$

76. פאָרמולע פאר דער סומע פונ אלע גלידער פונ אנ אריפמעטישער פראָגרעסיע.

אפריִער לאָמיר זיכ איבערצײַגנ אינ פאָלגנדיקער אײגנשאפט:

די סומע פונ צװײ גלידער פונ אנ אריפמעטישער פראָגרעסיע, װאָס זײַנע גלײַכ דערװײַטערט פונ די עקנ אירע, איז גלײַכ צו דער סומע פונ די עקסטע.

צום בײַשפיל, אינ דער פראָגרעסיע:

$$\div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23$$

געפינענ מיר:

$$3+23=26;\quad 7+19=26;\quad 11+15=26.$$

ס'איז פארשטענדלעכ, פארװאָס דאָס איז אזױ: די ערשטע כיבערצאָלנ פונ די דאָזיקע סומעס (ד. ה. 3, 7, 11) גײענ, אלצ פארגרעסערנדיק זיכ אפ 4, אונ די צװײטע כיבערצאָלנ (23, 19, 15) גײענ, אלצ פארקלענערנדיק זיכ אפ 4; דעריבער פארבלײַבט די סומע פונ יעטװידער פאָר די זעלביקע.

לאָמיר נעמענ נאָכ א בײַשפיל פונ א פאלנדיקער פראָגרעסיע:

$$\div 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4.$$

אינ איר איז: $8+(-4)=4$, $6+(-2)=4$, $4+0=4$. דער גליד 2, װאָס איז אלײנס דערװײַטערט סײַ פונעמ אָנהײב, סײַ פונעמ סאָפ, דארפ צונויפ־געלײגט װערנ מיט זיכ אלײנ: $2+2=4$. אויכ דאָ איז די זעלביקע דערקלערונג: די כיבערצאָלנ: 8, 6, 4, 2 גײענ, אלצ פארקלענערנדיק זיכ אפ 2, אונ די כיבער־צאָלנ -4, -2, 0 אונ 2 גײענ, אלצ פארגרעסערנדיק זיכ אפ 2; דעריבער בלײַבט די סומע פונ יעטװידער פאָר אומפארענדערט.

איצטער לאָמיר ארויספירנ די פאָרמולע פאר דער סומע פונ אלע גלידער בא יעט־װידער אר. פר. צוליב דעמ לאָמיר אָנװענדנ יענעמ מיטל, דורכ װעלכנ מיר האָבנ

געפונען די סומע גלידער פון אר. פר. אין דער אופגאבע § 73, גענומען: לאָמיר צונויפלייגן גלידערווײַז צוויי אזוינע גלײַכונגען:

$$s = a + b + c + \cdots + i + k + l$$
$$s = l + k + i + \cdots + c + b + a$$

$$2s = (a+l) + (b+k) + (c+i) + \cdots + (i+c) + (k+b) + (l+a)$$

אָבער

$$a + l = b + k = c + i = \cdots = l + a;$$

הייסט עס, אז

$$2s = (a+l)n;$$

פונוואַנען:

$$s = \frac{(a+l)n}{2}.$$

די סומע פון אלע גלידער בא אן אריפמעטישער פראָגרעסיע איז גלײַך צו א האלבן קייפל־פּראָדוקט פון דער סומע עקסטע גלידער אפ דער צאָל פון אלע גלידער.

אפ אזא אופן וועלן מיר אין דער אופגאבע § 73 געפינען פאר דער סומע s לויט דער דאָזיקער פאָרמול יענע צאָל, וועלכע מיר האָבן פריער געפונען דורך אן אנדער מיטל:

$$s = [(3+21)\cdot 10] : 2 = 120.$$

ב ײַ ש פ י ל 1.

פינט די סומע נאטורעלע צאָלן פון 1 ביז n אײַנשליסלעך.

די ריי: $1, 2, 3 \cdots n$ איז אן אר. פר., וואָס דער ערשטער גליד אירער איז 1, די דיפערענץ 1, די צאָל גלידער n און דער לעצטער גליד איז אויך n; דעריבער איז

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

צום בײַשפּיל

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21.$$

ב ײַ ש פ י ל 2.

געפינט די סומע פון די ערשטע n אומגראָדע צאָלן.

ווי מיר האָבן געזען אין פאָריקן פאראגראף, איז די n־טע אומגראָדע צאָל גלײַך צו $2n - 1$;

דעריבער איז:

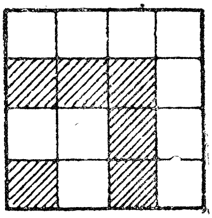
$$s = \frac{[1 + (2n-1)]\cdot n}{2} = n^2$$

צום בײַשפּיל:

$$1 + 3 = 4 = 2^2; \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

און אז. וו.

די דאָזיקע אייגנשאַפט פונ דער סומע אומגראָדע צאָלנ איז אָנשוילעכ אויסגע־דריקט אפ דער צייכענונג 25, וועלכע איז צונויפגעשטעלט אזוי: צו א קוואדראט (אונטנ לינקס) זײַנענ צוגעשטעלט 3 פונקט אזוינע קוואדראטנ (1 פונויבנ, 1 פונ דער זײַט און 1 אינעמ אויבערשטנ ווינקל); צו די דאָזיקע קוואדראטנ זײַנענ צוגעשטעלט נאָכ 5 קוואדראטנ (2 פונויבנ, 2 פונ דער זײַט און 1 אינ אויבערשטנ רעכטנ ווינקל). צו זיי, ווידער, זײַנענ צוגעלייגט 7 קוואדראטנ, נאָכדעמ 9 קוואדראטנ א. א. וו. דעמלט איז דײַטלעכ, אז



צייכ. 25.

$1+3+5+7=4^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3=2^2$

און א. וו.

ב ײַ ש פּ י ל 3.

געפינט די סומע פונ 10 גלידער פונ דער פּראָגרעסיע:

$$\div 3,\ 2\frac{1}{2},\ 2 \ldots$$

דאָ איז $a=3$, $d=2\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$; דעריבער וועט דער 10־טער גליד פונ דער פּראָגרעסיע זײַנ $3-\frac{1}{2}\cdot 9=-1\frac{1}{2}$, און דערפאר איז די געזוכטע סומע גלײַכ:

$$\frac{\left[3+\left(-1\frac{1}{2}\right)\right]10}{2}=1\frac{1}{2}\cdot 5=7\frac{1}{2}.$$

קאָנטראָל:

$$3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}.$$

77. ב א מ ע ר ק ו נ ג. אזויווי פאר פינפ צאָלנ a, l, d, n און s האָבנ מיר צוויי גלײַכונגענ:

$$l=a+d(n-1)$$

און

$$s=\frac{(a+l)n}{2},$$

קאָנענ מיר לויט די געגעבענע דרײַ פונ די דאָזיקע צאָלנ געפינענ די איבעריקע צוויי. פאר א בײַשפּיל לאָמיר לייזנ פאָלגנדיקע אופגאבע:

געפינט די צאָל גלידער פונ א פּראָגרעסיע, וואָס איר ערשטער גליד איז 7, די דיפערענצ איז 2 — און די סומע פונ אלע גלידער איז 12.

אין דער דאָזיקער אויפגאַבע זײַנען געגעבן געוואָרן: $a=7$, $d=-2$ און $s=12$; פאַרבליבן אומבאַוווּסטע l און n. אַז מיר וועלן אונטערשטעלן אין די גלײַכונגען די פאַרגעבענע צאָלן, וועלן מיר געפינען:

$$l=7-2(n-1)=9-2n;\quad 12=\frac{(7+l)n}{2},$$

פונוואַנען:

$$12=\frac{(7+9-2n)n}{2}=(8-n)n;$$

$$n^2-8n+12=0;\quad n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2;$$
$$n_1=6;\qquad n_2=2.$$

באַקומען זיך צוויי ענטפערס: די צאָל גלידער איז אָדער 6, אָדער 2. און אין דערעמעסן, די צוויי פּראָגרעסיעס: -3, -1, 1, 3, 5, 7 און 5, 7 האָבן איינע און די זעלביקע סומע 12.

78. פאָרמולע פאַר דער סומע פון די קוואַדראַטן פון צאָלן פון דער נאַטורלעכער רײ.

באַם לייזן אייניקע מאַטעמאַטישע פראַגן קומט אויס צו באַנוצן זיך ניט בלויז מיט דער פאָרמולע, וואָס באַשטימט די סומע פון די צאָלן פון דער נאַטורלעכער רײ, נאָר אויך מיט דער פאָרמולע, וואָס באַשטימט די סומע פון די קוואַדראַטן פון די דאָזיקע צאָלן. די דאָזיקע פאָרמולע קאָן מען אַרויספירן אַף אַזאַ אויפן: לאָמיר נעמען n אַזעלכע צאָליקע גלײַכקייטן:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3;$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3;$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2+1^3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3=n^3+3n^2\cdot1+3n\cdot1^2+1^3.$$

לאָמיר צונויפלייגן די דאָזיקע אַלע גלײַכקייטן. דעמלט וועט 2^3, וואָס שטייט אינעם לינקן טייל פון דער ערשטער גלײַכקייט, זיך קעגנזײַטיק אַנולירן מיטן 2^3, וואָס שטייט אינעם רעכטן טייל פון דער צווייטער גלײַכקייט, 3^3 אינעם לינקן טייל פון דער צווייטער גלײַכקייט וועט זיך אַנולירן מיטן 3^3 אינעם רעכטן טייל פון דער דריטער גלײַכקייט א. א. וו. נאָך אַזאַ אַנולירונג וועלן מיר באַקומען:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n.$$

באַצייכענענדיק צוליב קורצקייט:

$$1+2+3+\ldots+n=S_1,$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=S_2,$$

וועלן מיר האָבן:

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n,$$

פונוואנענ:

$$S_2=\frac{(n+1)^3-1-n}{3}-S_1=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}-S_1.$$

אָבער

$$n^3+3n^2+2n=n^3+2n^2+n^2+2n=n^2(n+2)+n(n+2)=$$
$$=n(n+1)(n+2);$$

דעריבער איז:

$$S_2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-S_1.$$

פונ דער גלײַכקײַט:

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

געפינענ מיר:

$$n(n+1)=2S_1.$$

הייסט עס:

$$S_2=\frac{2S_1(n+2)}{3}-S_1=S_1\left[\frac{2(n+2)}{3}-1\right]=S_1\cdot\frac{2n+1}{3},$$

אָדער

$$S_2=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

צום בײַשפּיל:

$$1^2+2^2+3^2=\frac{3(3+1)(6+1)}{6}=14;$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4(4+1)(8+1)}{6}=30$$

אונ אז. וו.

געניטונגענ.

114. געפינט דעם 30-טנ גליד פונ דער אר. פר.: ...3,7.

115. געפינט דעם 15-טנ גליד פונ אנ אר. פר., בא וועלכער דער 1-טער גליד איז 130 אונ די דיפערענצ איז 3—.

116. וויפל גלידער דארפ מענ נעמענ אינ דער פראָגרעסיע $\div 4,8 \ldots$, אז זייער סומע זאָל זײַנ גלײַכ 112?

117. געפינט די סומע פונ 103 גלידער פונ דער אר. פר.: ...101, 103.

118. דער 3-טער גליד פונ אנ אר. פר. איז 7, אונ דער 9-טער גליד איז 18. געפינט דעם 1-טנ אונ דעם 6-טנ גליד.

119. באַווײַזט, אַז אויב a, b אונ c זײַנען דרײַ קאָנסעקוטיווע גלידער פונ אַ אַ.פּר., איז b מיטל־אַריטמעטישע צווישנ a אונ c.

120. דער 2־טער גליד פונ אַנ אַר. פּר. איז גלײַכ $+1$, אונ דער 5־טער גליד איז $+7$. געפינט די סומע פונ 1000 גלידער באַ דער דאָזיקער אַר. פּר.

121. געפינט די צאָל גלידער פונ אַנ אַר. פּר., וואָס איר דיפערענצ איז -12, דער לעצטער גליד איז 15 אונ די סומע פונ אַלע גלידער איז 456.

122 אָפּ וויפל איינסנ שטײַגט אַריבער די סומע פונ אַלע גאַנצע צאָלנ פונ 51 ביז אײַנשליסלעכ 100, די סומע גאַנצע צאָלנ פונ 1 ביז 50 אײַנשליסלעכ?

123. וויפל מאָל וועט שלאָגנ דער זייגער אינ מעשעכ פונ מעסלעס, אויב ער שלאָגט גאַנצע שאָענ אונ יעטווידער האַלבע שאָ?

124. צי קאָנענ די זײַטנ פונ אַ גראָדווינקלדיקנ דרײַעק צוזאַמענשטעלנ אַנ אַריטמעטישע פּראָגרעסיע?

125. אַ קערפּער, וואָס פאַלט פרײַ פונ אַ געוויסער הייכ, גייט דורכ אינ דער ערשטער סעקונדע 4,9 מ אונ אינ יעטווידער ווײַטערדיקער סעקונדע אָפּ 8,9 מ מער. פונ וואָס פאַר אַ הייכ איז געפאַלנ דער קערפּער, אויב דאָס פאַלנ האָט געדויערט 10 סעקונדעס.

126. די סומע פונ די ערשטע זעקס גלידער פונ אַנ אַר. פּר. איז גלײַכ צו 17. געפינט די דאָזיקע פּראָגרעסיע, אויב דער פערטער גליד איר(ער) איז 3.

127. פונ די גלײַכונגענ

$$l = a + d(n-1)$$

אונ

$$s = \frac{(a+l)n}{2}$$

שליסט אויס דעמ l; אַנדערש געזאָגט, דריקט אויס s בלויז אינ אָפּהענגיקײַט פונ a, d אונ n.

128. געפינט אַזעלכע דרײַ צאָלנ, אַז זיי זאָלנ בילדנ אַנ אַר. פּר. מיט דער דיפערענצ d אונ אַז די סומע זייערע זאָל זײַנ גלײַכ צו זייער קייפל־פּראָדוקט.

II. געאָמעטרישע פּראָגרעסיע.

79. אויפגאַבע. מע זאָגט, אַז דער אינדוסישער פרינצ סיראַמ האָט פאָרגעלייגט דעמ דערפינדער פונ דער שאַכמאַט־שפּיל צו בעטנ באַ אימ אַ באַלוינונג, וואָסערע ער וועט נאָר וועלנ. יענער האָט געבעטנ, אַז מע זאָל אימ געבנ פאַרנ ערשטנ קוואַדראַט פונ דער שאַכמאַט־ברעט 1 קערנדל ווייצ, פאַרנ צווייטנ קוואַדראַט—2 קערנדלעכ, פאַרנ דריטנ—4 אונ אַז. וו., פאַרגרעסערנדיק אינצווייענ פאַר יעדערנ פונ די ווײַטערדיקע קוואַדראַטנ. דער פרינצ האָט אײַנגעשטימט. אָבער ווענ מע האָט אויסגערעכנט דעמ סכומ ווייצ, וואָס מע דאַרפ אַרויסגעבנ פאַר אַלע 64 קוואַדראַטנ פונ דער שאַכמאַט־ברעט, האָט זיכ אַרויסגעוויזנ, אַז אַזאַ גרויסע באַלוינונג קאָנ ניט אַרויסגעגעבנ ווערנ צוליבנ דויכעק אינ ווייצ. וויפל קערנדלעכ וואָלט אויסגעקומענ אַרויסגעבנ דעמ דערפינדער?

דער סכומ קערנער, וואָס עס קומט אויס אַרויסצוגעבנ פאַר אַלע 64 קוואַדראַטנ, איז גלײַכ צו דער סומע s פונ פאָלגנדיקער ריי צאָלנ:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}.$$

מיר קאָנענ געפינענ די דאָזיקע סומע, ניט אויסרעכנענדיק באַזונדער די כיבערצאָלנ. לאָמיר קייפלענביידע טיילנ פונ דער אָנגעשריבענער גלײַכקײַט אָפּ 2:

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64}.$$

איצטער לאָמיר אראָפּנעמענ פונ דער דאָזיקער גלײַכקײַט די פּאָריקע; דעמלט װעלנ מיר אינעם לינקנ טײל באקומענ s_1, אונ אינעם רעכטנ $2^{64} - 1$ (די צאָלנ 2, 2^2, 2^3... 2^{63} װעלנ זיכ אלע פארקירצנ):

$$s = 2^{64} - 1.$$

הײסט עס, עס װעט אויסקומענ אויסצורעכענענ די מאדרײגע 2^{64}, װאָס מע קאָנ טאָנ אָדער דורכ קעסײדערדיקנ איבערקײפּלענ אפּ 2 לויט דער פּאָרמולע:

$$2^{64} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \text{(64 קײפּלערס)}$$

אָדער לויט דער פּאָרמולע:

$$2^{64} = [(2^{16})^2]^2 = (65536^2)^2.$$

די ענדגילטיקע צאָל קערנער װעט זײַנ:

$$s = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

מע קאָנ אויסרעכענענ, אז אויב מע זאָל אזא צאָל קערנער צעשיטנ גלײַכמעסיק איבער דער גאנצער טריקעניש פונ דער ערד, װאָלט זיכ אויסגעבילדעט א שיכט װײַצ די גרעב ארומ 9 ממ.

אינ דער דאָזיקער אויפגאבע האָבנ מיר געהאט צו טאָנ מיט א רײ צאָלנ, װאָס יעדערע פונ זײ, אָנהײבנדיק פונ דער צװײטער, איז גלײַכ צו דער פּאָריקער צאָל געקײפּלט אפּ אײנער אונ דער זעלבער צאָל. אזוינע רײענ צאָלנ רופנ זיכ **געאָמעטרישע פּראָגרעסיעס**.

80. דעפיניציע. געאָמעטרישע פּראָגרעסיע רופט זיכ א רײ צאָלנ, אינ װעלכער יעדער צאָל, אָנהײבנדיק פונ דער צװײטער, איז גלײַכ צו דער פּאָריקער, געקײפּלט אפּ אײנער אונ דער זעלביקער צאָל, א שטענדיקער פאר דער דאָזיקער רײ.

צומ בײַשפּיל, די דרײַ רײענ:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128 \ldots;$$

$$8, -16,\ 32, -64,\ 128, -256,\ 512;$$

$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{32}$$

שטעלנ פאָר געאָמעטרישע פּראָגרעסיעס, װײַל אינ די דאָזיקע רײענ, איז יעדער צאָל, אָנהײבנדיק פונ דער צװײטער, באקומט זיכ פונ דער פּאָריקער צאָל, דורכ קײפּלענ: אינ דער ערשטער רײ אפּ 2, אינ דער צװײטער — אפּ -2 — אונ אינ דער דריטער אפּ $\frac{1}{2}$.

קעדײ צו באצײכענענ, אז די געגעבענע רײ איז א געאָמעטרישע פּראָגרעסיע, שטעלט מענ אנ אנדערשמאָל אינ אָנהײב פאר איר דעמ צײכנ $\div\!\div$.

פונקט ווי אין אן אריפמעטישער פראָגרעסיע, רופן זיך די צאָלן, וואָס שטעלן צו־נויף די געאָמעטרישע פראָגרעסיע, אירע גלידער; די צאָל, אפ וועלכער מע דארף קייפלען דעם פאָריקן גליד, קעדיי צו באקומען דעם ווייטערדיקן, רופט זיך דער דייטער פון דער פראָגרעסיע.

די פראָגרעסיע רופט זיך שטייגנדיקע אָדער פאלנדיקע, אָפהענגיק פון דעם, צי עס פארגרעסערט זיך אָדער עס פארקלענערט זיך די אבסאָליוטע גרייס פון די גלידער אין דער פראָגרעסיע באם דערווייטערן זיך פונעם אָנהייב ריי; אפ אזא אויפן זיינען פון די דריי פריער אָנגעוויזענע פראָגרעסיעס די ערשטע און די צווייטע שטייגנדיקע, און די דריטע—א פאלנדיקע. אין א שטייגנדיקער פראָגרעסיע איז די אבסאָליוטע גרייס פונעם דייטער גרעסער פון 1, און אין א פאלנדיקער איז זי קלענער פון 1.

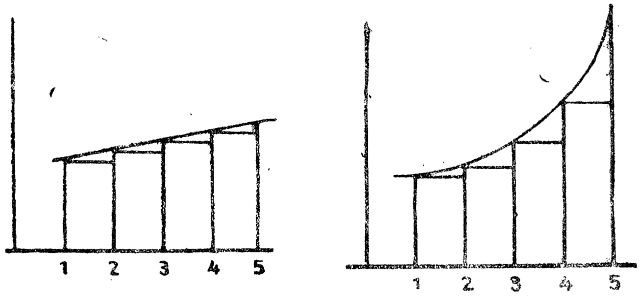
געווייגלעך באצייכנט מען דעם דייטער פון דער פראָגרעסיע מיטן בוכשטאב q, און די גלידער, זייער צאָל און סומע באצייכנט מען פונקט אזוי, ווי דאָס איז אָנגענומען פאר אן אריפמעטישער פראָגרעסיע, ד. ה.

(דער לעצטער גליד) $a, b, c \ldots l$

n (צאָלגלידער) און s (סומע).

צוליב קורצקייט וועלן מיר די ווערטער „געאָמעטרישע פראָגרעסיע" שרייבן אזוי: ג. פר.

81. פארגלייכונג פון א ג. פר. מיט אן אר. פר. די דיפערענץ פון צוויי שכייניש גלידער אין אן אר. פר. פארבלייבט איינע און די זעלביקע, און אירע גלידער,



צייכ. 26.

דעריבער, שטייגן (אָדער פאלן) גלייכמעסיק (צייכ. 26, לינקס). לאָמיר א קוק טאָן א וואָסערע איז די דיפערענץ פון צוויי שכייניש גלידער אין א ג. פר.

(דייטער q) $\div a, b, c \ldots$

פון דער דעפיניציע וועגן א פראָגרעסיע דרינגט ארויס:

$$b = aq, \ c = bq, \ d = cq$$

א. א. וו.;

אזוי ארום איז:

$$b-a=aq-a=a(q-1);$$
$$c-b=bq-b=b(q-1)$$

א. א. וו.

אויב די פּראָגרעסיע איז א שטײַגנדיקע און אירע גלידער זײַנען פּאָזיטיווע, איז דעמלט

$$a<b<c<\dots$$

א. א. וו.;

דעריבער איז אויך

$$a(q-1)<b(q-1)<c(q-1)<\dots,$$

ד. ה.,

$$b-a<c-b<d-c<\dots$$

א. א. וו.

הייסט עס, אין א שטײַגנדיקער ג. פּר. מיט פּאָזיטיווע גלידער פּארגרעסערט זיך די דיפערענץ פון צוויי שכייניש גלידער לויט דעם, ווי זיי דערווײַטערן זיך פונעם אָנהייב ריי; מאכמעס דעם וואקסן די גלידער פון אזא פּראָגרעסיע לויט זייער דערווײַטערן זיך פונעם אָנהייב ריי אלץ האסטיקער און האסטיקער, ווי דאָס איז אָנשויליך געשילדערט אפ דער צייכענונג 26. צום בײַשפּיל:

$$\div\ 2,\ 4.\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\dots$$
$$\div\div 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\dots$$

82. פאָרמולע פון יעטווידער גליד פון א ג. פּר. לאָמיר האָבן אזא ג. פּר.

$\div\div 3,\ 6,\ 12,\ ,24\dots$ (2 דײַטער)

דעמלט איז

גליד 2־טער $=3.2=6;$

" 3־טער $=3.2.2=3.2^2=12;$

" 4־טער $=3.2.2.2=3.2^3=24$

א. א. וו.

צום בײַשפּיל:

גליד 10־טער $=3.2^9=3.512=1536$

א. א. וו.

דאָסגלײַכן, אויב מיר האָבן א פּראָגרעסיע:

$\div\div\ 10\ ,5\ ,2\frac{1}{2},\ \ 1\frac{1}{4}\dots\ \left(\frac{1}{2}\right.$ דײַטער$\left.\right)$,

איז

גליד 2־טער $=10\cdot\frac{1}{2}=5;$

" 3־טער $=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=2\frac{1}{2};$

" 4־טער $=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$

א. א. וו.

אין אלגעמיין, אויב מיר האָבן אַ פּראָגרעסיע אין דער בוכשטאַביקער פאָרם:

$$\div\div a, b, c \ldots (q \text{ דײַטער}),$$

איז אין איר

$$\text{2-טער גליד} = aq = aq^1;$$

$$\text{3-טער } " = aq \cdot q = aq^2;$$

$$\text{4-טער } " = aq^2 \cdot q = aq^3$$

א. א. וו.

אַזוי אַרום איז

$$\text{10-טער גליד} = aq^9;$$

בכלל

$$m\text{-טער גליד} = aq^{m-1},$$

הייסט עס:

יעטווידער גליד פון אַ ג. פּר., אָנהייבנדיק פונעם צווייטן, איז גלײַך צו דעם ערשטן גליד, געקייפלט אויפן דײַטער אין אַ מאַדריידיגע, וואָס איז גלײַך צו דער צאָל גלידער, וועלכע שטייען פאַר יענעם גליד, וואָס ווערט באַשטימט.

דער לעצטער גליד, l, וואָס פאַר אים שטייען $n-1$ גלידער, ווערט זיך אויסדריקן דורך דער פאָרמולע:

$$l = aq^{n-1}$$

ביישפּיל 1. געפינט דעם 6-טן גליד פון דער פּראָגרעסיע:

$$\div\div 3,\ 12 \ldots$$

דער דײַטער פון אַזאַ פּראָגרעסיע איז

$$12 : 3 = 4;$$

דעריבער איז

$$\text{6-טער גליד} = 3 \cdot 4^5 = 3072.$$

ביישפּיל 2.

געפינט דעם 10-טן גליד פון דער פּראָגרעסיע:

$$\div\div 20,\ 10\ldots$$

אַזויווי דער דײַטער פון דער דאָזיקער פּראָגרעסיע איז גלײַך

$$10 : 20 = \frac{1}{2},$$

איז דער 10-טער גליד גלײַך:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}.$$

אויספיר. א געאָמעטרישע פּראָגרעסיע, וואָס דער ערשטער גליד אירער איז a, דער דיַיטער איז q און די צאָל פון אַלע גלידער איז n, קאָן מען פאָרשטעלן אזוי:

$$\div\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ aq^{n-1}.$$

83. פאָרמולע פאר דער סומע פון אַלע גלידער בא א געאָמעטרישער פּראָגרעסיע. מיר וועלן אָנווענדן יענעם מיטל, מיט וועלכן מיר האָבן פריִער (§ 79) געפונען די סומע

$$1+2+2^2+\ldots+2^{63}.$$

לאָמיר קייפלען ביידע טיילן פון דער גליַיכקיַיט:

$$s=a+b+c+\ldots+k+l \qquad (1)$$

אפן דיַיטער q; דעמלט וועלן מיר באקומען:

$$sq=aq+bq+cq+\ldots+kq+lq.$$

אָבער

$$aq=b,\ bq=c,\ cq=d,\ldots\ kq=l;$$

הייסט עס, אז

$$sq=b+c+d+\ldots+l+lq. \qquad (2)$$

אראָפּגענומען גלידערוויַיז פון דער גליַיכקיַיט (2) די גליַיכקיַיט (1), געפינען מיר:

$$sq-s=lq-a,$$

ד. ה.

$$(q-1)s=lq-a,$$

פונוואנען:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

די סומע פון אַלע גלידער בא א געאָמעטרישער פּראָגרעסיע איז גליַיך צו א ברוכצאָל, וואָס איר ציילער איז די דיפערענץ צווישן דעם קייפל־פּראָדוקט פונעם לעצטן גליד אפן דיַיטער פון דער ג. פּר. און דעם ערשטן גליד אירן, און דער דיַיטער איז די דיפערענץ צווישן דעם דיַיטער פון דער פּראָגרעסיע און אן איינס.

באמערקונגען. 1. אזוי־ווי פאר א פאלנדיקער פּראָגרעסיע איז $lq<a$ און $q<1$, איז בא אזא פּראָגרעסיע בעסער צוצוגעבן דער פאָרמולע פון דער סומע אן אנדער פאָרם, קייפלענדיק דעם ציילער און דעם דיַיטער פון דער ברוכצאָל אפן -1:

$$s=\frac{a-lq}{1-q}.$$

2. אויב מיר וועלנ אַנשטאָט דעמ גליד l אונטערשטעלנ דעמ צו אימ גלײַכנ אויסדרוק aq^n, וועט די פאָרמולע פאַר דער סומע אָנעמענ אזא פאָרמ:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

אָדער

$$\frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

ביַישפּיל. געפינט די סומע פונ 8 גלידער בא א פּראָגרעסיע, וואָס בא איר איז $a = 1$ אונ $q = \frac{1}{3}$.

דעמלט איז:

$$l = 1 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

אונ

$$s = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\frac{2}{3}} = \frac{3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^8}{2} = \frac{3280}{2187} .$$

84. ביַישפּיל פונ אנ אופגאבע אפ א געאָמעטרישער פּראָגרעסיע.

געפינט דעמ ערשטנ גליד a אונ דעמ לעצטנ l, אויב $q = 3$, $n = 5$ אונ $s = 242$.

אפריִער געפינענ מיר l לויט דער פאָרמולע:

$$l = aq^{n-1} = a \cdot 3^4$$

אונ נאָכדעמ שטעלנ מיר אונטער די דאָזיקע גרייס אונ די געגעבענע צאָלנ אינ דער פאָרמולע:

$$242 = \frac{a \cdot 3^4 \cdot 3 - a}{3 - 1} = \frac{a(3^5 - 1)}{2} = 121a;$$

פונוואנענ:

$$a = 242 : 121 = 2.$$

איצטער געפינענ מיר:

$$l = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

קאָנטראָל:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242.$$

גענ יטונגענ.

129. געפינט דעמ 1־טנ גליד פונ א ג. פר., וואָס דער דריַטער אירער איז 5 אונ דער 7־טער גליד איז גלײַכ צו 62500.

130. געפינט די סומע פונ די ערשטע אכט גלידער בא א ג. פר.:

$$5, \frac{5}{6} \dots$$

131. געפינט פיר צאָלנ, ווענ מיר וויסנ, אז זיי בילדנ א ג. פר., אז זייער סומע איז גלײַכ צו 360 אונ אז די לעצטע צאָל איז אינ 9 מאָל גרעסער פונ דער צווייטער.

132. געפינט די סומע פונ צוועלפ גלידער פונ א ג. פר. $\sqrt{2}, 2, \ldots$

133. בילדעט א ג. פר. פונ פיר גלידער אזוי, אז די סומע פונ 1־טנ אונ 3־טנ גליד זאָל באַטרעפנ 5, אונ די סומע פונ 2־טנ אונ 4־טנ — 10.

134. מע האָט באמערקט, אז די באפעלקערונג פונ איינער א שטאָט פארגרעסערט זיכ יעדער יאָר אינ איינער אונ דער זעלביקער פארהעלטעניש. ווי גרויס איז די דאָזיקע פארהעלטעניש, אויב פאר 3 יאָר האָט זיכ די באפעלקערונג פארגרעסערט פונ 10 000 ביז 14641 מענטשנ?

135. באווײַזט, אז די ריי, וואָס עס בילדנ אויס די צאָלנ, וועלכע זײַנענ פארקערטע אינ פארגלײַכ צו די גלידער פונ דער ג. פר., איז אויכ א ג. פר. צי איז ריכטיק אזא אייגנשאפט אינ באצוג צו אנ אר. פר.?

136. דער 5־טער גליד פונ א ג. פר. איז 61, אונ דער 11־טער גליד איז גלײַכ צו 1647. געפינט דעמ 7־טנ גליד.

137. באווײַזט, אז אינ יעטווידער ג. פר. איז די סומע גלידער פונ 4־טנ, 5־טנ אונ 6־טנ גליד די מיטל־געאָמעטרישע צווישנ דער סומע פונ 1־טנ, 2־טנ אונ 3־טנ גליד אונ דער סומע פונ 7־טנ, 8־טנ אונ 9־טנ גליד.

138. די דיפערענצ צווישנ דעמ 1־טנ אונ 2־טנ גליד פונ א ג. פר. איז 8, אונ די סומע פונ 2־טנ אונ 3־טנ גליד איז 12. געפינט די פראָגרעסיע.

139. צי קאָנענ די זײַטנ פונ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק בילדנ א געאָמעטרישע פראָגרעסיע?

III. אומענדלעכע פראָגרעסיעס.

85. אייניקע אייגנשאפטנ פונ אזוינע פראָגרעסיעס. אויב די ריי צאָלנ, וואָס שאפט די פראָגרעסיע, קאָנ פאָרגעזעצט ווערנ אָנ א סאָפ, רופט זיכ די פראָגרעסיע אנ אומענדלעכע. לאָמיר באטראכטנ אייניקע אייגנשאפטנ פונ אזוינע פראָגרעסיעס.

א) לאָמיר נעמענ אנ אומענדלעכ־שטײַגנדיקע אר. פר., וואָס די דיפערענצ איז בא איר זייער א קליינע, צומ בײַשפּיל, אזא:

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04\ldots$$

ניט געקוקט אפ דעמ, וואָס די גלידער פונ דער דאָזיקער פראָגרעסיע באמ דערווײַטערנ זיכ פונעמ אָנהייב ריי וואקסנ זייער פאמעלעכ, קאָנענ זיי פונדעסטוועגנ בא א גענוגנדיקנ דערווײַטערנ זיכ אריבערשטײַגנ יעטווידער געגעבענע צאָל, ווי גרויס זי זאָל ניט זײַנ; צומ בײַשפּיל, זיי קאָנענ ווערנ גרעסער פונ 1 000 000. אינדערעמעשנ, קעדיי דער $(n+1)$־טער גליד פונ אזא פראָגרעסיע, וועלכער איז גלײַכ צו דער סומע $1+0{,}01n$, זאָל קאָנענ ווערנ גרעסער פונ 1 000 000, איז גענוג פאר n צו נעמענ אזא גרויסע צאָל, וועלכע זאָל באפרידיקנ די ניטגלײַכקײַט:

$$1+0{,}01n>1\,000\,000.$$

פונ איר געפינענ מיר, אז:

$$n>\frac{999\,999}{0{,}01}=99\,999\,900.$$

אזויווי אינ אנ אומענדלעכער פראָגרעסיע קאָנ די צאָל n ווערנ ווי גרויס מיר ווילנ, קאָנ זי ווערנ גרעסער פונ 99 999 900; אונ דעמלט וועט $1+0{,}01n$ ווערנ גרעסער פונ 1 000 000.

דעם דאָזיקנ געדאנקענגאנג קאָנ מענ איבערכאזערנ וועגנ יעטווידער אריפמע־טישער אומענדלעכ־שטײַגנדיקער פּראָגרעסיע; דעריבער קאָנענ מיר ארויסזאָגנ אזא אלגעמײנעמ אויספיר:

די גלידער פונ אנ אומענדלעכ־שטײַגנדיקער אריפמעטישער פּראָגרעסיע באַם גענוגנדיקנ דערווײַטערנ זיכ פונעמ אָנהייב זײ קאָנענ אריבערשטײַגנ יעטווידער געגעבענע צאָל, ווי גרויס זי זאָל ניט זײַנ.

אויב מיר וועלנ נעמענ אנ אומענדלעכ־פאלנדיקע אריפמעטישע פּראָגרעסיע, צומ בײַשפּיל:

$$\div 1000;\ 998;\ 996\ldots$$ (2— דיפערענצ),

איז, ווי גרויס עס זאָל ניט זײַנ דער אָנפאנגלעכער גליד, וועלנ, אָנהייבנדיק פונ א געוויסנ אָרט, די גלידער פונ דער פּראָגרעסיע ווערנ נעגאטיווע, אונ די אבסאָליוטע גרייס פונ א גליד קאָנ אריבערשטײַגנ יעטווידער געגעבענע צאָל, ווי גרויס זי זאָל ניט זײַנ.

ב) לאָמיר איצטער נעמענ אנ אומענדלעכ־שטײַגנדיקע ג. פּר. מיט פּאָזיטיווע גלידער, צומ בײַשפּיל אזא:

$$\div\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}01^2 = 1{,}0201;\ 1{,}01^3 = 1{,}030301\ldots$$ (0,01 דײַטער)

אונ לאָמיר זי פארגלײַכנ מיט אנ אומענדלעכער אר. פּר.:

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03\ldots$$ (1,01 דיפערענצ),

באַ וועלכער די ערשטע צוויי גלידער זײַנענ אלצײנע מיט דער ג. פּר., וואָס מיר האָבנ גענומענ.

ווי מיר האָבנ פריער געזענ, וואקסנ די גלידער פונ דער ג. פּר. גיכער, אײדער די גלידער פונ דער אר. פּר.

אָבער די גלידער פונ א וואקסנדיקער אר. פּר. באַ א גענוגנדיקער דערווײַטע־רונג פונעמ אָנהייב זײ קאָנענ אריבערשטײַגנ יעטווידער צאָל; הייסט עס, אז די גלידער פונ אונדזער ג. פּר. קאָנענ אוואדע אונ אוואדע ווערנ גרעסער פונ יעטווי־דער געגעבענער צאָל. אט אזא אויפנ איז:

די גלידער פונ אנ אומענדלעכ־שטײַגנדיקער געאָמעטרישער פּראָגרעסיע (מיט פּאָזיטיווע גלידער) באַ א גענוגנדיקער דערווײַטערונג פונעמ אָנהייב זײ קאָנענ אריבערשטײַגנ יעטווידער געגעבענע צאָל, ווי גרויס זי זאָל ניט זײַנ.

די דאָזיקע אײגנשאפט קאָנ מענ אָנווענדנ אויכ צו אזא שטײַגנדיקער ג. פּר., וואָס אירע גלידער, אלע, צי אײניקע, זײַנענ נעגאטיווע צאָלנ, צומ בײַשפּיל:

$$-5,\ -10,\ -20\ \ldots$$

אָדער

$$5,\ -10,\ 20,\ -40\ \ldots$$

דעמלט דארפ מענ בלויז ריידנ ניט וועגנ די עצעמ גלידער, נאָר וועגנ זייער אבסאָליוטער גרייס.

ג) לאָמיר איצטער נעמענ א וואָסער ניט איז בײַשפּיל פונ אנ אומענדלעכ-פאַלנדיקער ג. פּר. מיט פּאָזיטיווע גלידער, צום בײַשפּיל אזא:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3}\ \dots\ \frac{1}{2^n}\dots\ \left(\frac{1}{2}\ \text{דײַטער}\right).$$

די גלידער פונ אזא פּראָגרעסיע באַם דערווײַטערנ זיכ פונעם אָנהייב ווער-גען ווייניקער, קלענער, אָבער צי קאָנענ זיי ווערנ קלענער פונ יעטווידער געגעבע-נער פּאָזיטיווער צאָל, צום בײַשפּיל, קלענער פונ 0,000001, דאָס איז גלײַכ אפנ אָרט ניט קאָנטיק. קעדיי דאָס זאָל זיכ ארויסווײַזנ, לאָמיר נעמענ א באהילפיקע פּראָגרעסיע, וואָס אירע גלידער זײַנענ פארקערטע אינ באצוג צו די גלידער פונ דער פריער גענומענער פּראָגרעסיע:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\dots\ 2^n\dots\ (2\ \text{דײַטער}).$$

די דאָזיקע פּראָגרעסיע איז א שטײַגנדיקע, אונ דעריבער קאָנענ אירע גלידער, ווי מיר האָבנ נאָר וואָס געזענ, אריבערשטײַגנ יעטווידער געגעבענע צאָל; הייסט עס, אז זיי וועלנ אריבערשטײַגנ אויכ 1 000 000. אויב אָבער עס וועט זיכ ארויסווײַזנ, אז

$$2^n > 1\,000\,000,$$

איז דעמאָלט אפּאָנעם:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

לאָמיר אָנווענדנ דעם דאָזיקנ געדאנקענגאנג צו א וואָסער מע וויל אומענדלעכ-פאַלנדיקער ג. פּר. (מיט פּאָזיטיווע גלידער):

$$\div\, a,\ b,\ c\dots\ (q < 1\ \text{דײַטער}).$$

קעדיי צו דערווײַזנ, אז די גלידער פונ דער דאָזיקער פּראָגרעסיע, בא א גע-נוגנדיקער דערווײַטערונג פונעם אָנהייב ריי, קאָנענ ווערנ קלענער פונ יעטווידער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל α (ווי קליינ די דאָזיקע צאָל זאָל ניט זײַנ), לאָמיר נעמענ א באהילפיקע ג. פּר.:

$$\div\,\frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3}\dots\ \frac{1}{aq^n}\dots\left(\frac{1}{q} > 1\ \text{דײַטער}\right).$$

די דאָזיקע פּראָגרעסיע איז א שטײַגנדיקע, ווײַל איר דײַטער איז גרעסער פונ 1. אָבער די גלידער פונ א שטײַגנדיקער ג. פּר. קאָנענ אריבערשטײַגנ יעטווידער געגע-בענע צאָל; הייסט עס, אז זיי וועלנ אריבערשטײַגנ אויכ די צאָל $\frac{1}{\alpha}$. דעריבער וועט בא א גענוג גרויסנ n זײַנ באפרידיקט די ניטגלײַכקײַט:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{\alpha},$$

אונ דעמלט איז

$$aq^n < \alpha.$$

די גלידער פון אַן אומענדלעך־פאַלנדיקער געאָמעטרישער פּראָגרעסיע באַקומען זיך ווען די צאָל פון געגעבענע גלידער איז גרעסער ...

געוויינלעך דערוויַיטערונג פונעם אָנהייב ריי קאָנען ווערן קלענער פון יעטווידער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל.

86. באַגריף וועגן לימיט. לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אַז אין דער אומענדלעך־פאַלנדיקער געאָמעטרישער פּראָגרעסיע:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \dots$$

האָבן מיר גענומען 10 גלידער פון אָנהייב; דעמלט וועט דער לעצטער (10־טער) גליד זיַין $\left(\frac{1}{2}\right)^9$, און די סומע פון די דאָזיקע 10 גלידער (מיר וועלן זי באַצייכענען s_{10}) וועט זיַין:

$$s_{10} = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9.$$

פּונקט אַזוי וועלן מיר געפינען:

$$s_{11} = 2 - \frac{1}{2^{10}}; \quad s_{12} = 2 - \frac{1}{2^{11}}; \dots \quad s_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

מיר זעען, אַז באַם פאַרגרעסערן די צאָל גלידער דערנענטערט זיך זייער סומע אַלץ מער און מער צו 2. צום בייַשפּיל, די סומע s_{n+1} איז קלענער פון 2 אַפּ דער ברוכצאָל $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, און די דאָזיקע ברוכצאָל ווערט, ווי מיר האָבן געזען, באַ אַ גענוג גרויסן n קלענער פון יעטווידער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל.

אויב אַ וואַקסערע ניט איז פאַרענדערלעכע צאָל (אין אונדזער בייַשפּיל—די סומע פון גלידער באַ דער פּראָגרעסיע), באַם ענדערן זיך, דערנענטערט זיך אַלץ מער און מער צו אַ געוויסער קאָנסטאַנטער צאָל (אין אונדזער בייַשפּיל—צו דער צאָל 2) אַזוי, אַז די דיפערענץ צווישן דער דאָזיקער צאָל און דער פאַרענדערלעכער ווערט און פאַרבלייַבט קלענער פון יעטווידער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל, ווי קליין זי זאָל ניט זיַין, הייסט די דאָזיקע קאָנסטאַנטע צאָל דער ל י מ י ט פון דער פאַרענדערלעכער.

באַמערקנדיק דאָס, קאָנען מיר זאָגן, אַז די פאַרענדערלעכע סומע

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

באַם אומבאַגרענעצטן שטייַגן פונעם n, שטרעבט צום לימיט 2, און דאָס גיט מען איבער שריפטלעך אַזוי:

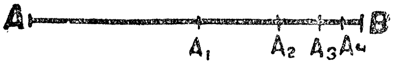
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \to 2,$$

אויב $n \to \infty$

(די ווײַזערלעכ פארבײַטנ דאָס וואָרט „שטרעבט"), אָדער מע שרײַבט אזוי:

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2n}\right)_{n=\infty}=2.$$

דאָ איז „lim" דאָס פארקירצטע וואָרט „לימיט", אונ דער צוגאָב אונטנ באמ קלאמער: $n=\infty$ פארבײַט די פראזע: „ווענ n פארגרעסערט זיכ אומבאגרענעצט" (ווענ n שטרעבט צו ∞).



צייכ. 27

מע קאָנ אָנשוילעכ באווײַזנ (צייכ. 27), אז די באטראכטע סומע דערנעענטערט זיכ אומבאגרענעצט נאָענט צו 2. לאָמיר אָנעמענ, אז דער אָפּשניט $AA_1=1$ אונ $AB=2$. דעמלט איז

$$1+\frac{1}{2}=AA_2,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=AA_3,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=AA_4$$

א. א. וו.;

קלאָר, אז באמ פארגרעסערנ די צאָל גלידער פונ דער פראָגרעסיע רוקנ מיר זיכ צו אומבאגרענעצט צומ פונקט B, אונ, הייסט עס, די סומע

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$$

שטרעבט צומ אָפּשניט $AB=2$.

87. פאָרמולע פאר דעמ לימיט פונ דער סומע בא אנ אומענדלעכ פאלנדיקער ג. פר.

אויב איז אנ אומענדלעכ-פאלנדיקער ג. פר.:

$$\div\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\dots(q<1)$$

וועלנ מיר נעמענ n גלידער פונ אָנהייב, וועט דער לעצטער גליד זײַנ aq^{n-1}, אונ זייער סומע וועט זײַנ:

$$s_n=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

די דאָזיקע פאָרמולע קאָנ מענ פאָרשטעלנ אזוי (אונטערשרײַבנדיק דעמ דײַטער אונטער יעדער גליד פונעמ צייִלער):

$$s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

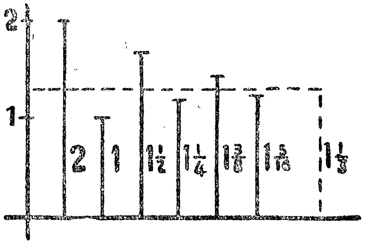
לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ, אז n פארגרעסערט זיכ אומענדלעכ. דעמלט פארבלײַבט די צאָל $\frac{a}{1-q}$ אנ אומפארענדערלעכע, אָבער די ברוכצאָל $\frac{aq^n}{1-q}$ האלט זיכ אײַנ אײַנ פארקלענערנ, אונ דערבײַ אומבאגרענעצט, ווײַל דער צייִלער אירער, ווי מיר האָבנ געזענ פריִער, ווערט קלענער פונ יעטווידער געגעבענער פאָזיטיווער צאָל, אונ דער דײַטער פארבלײַבט אנ אומפארענדערלעכער. דאָס באטײַט, אז:

$$s_n\longrightarrow\frac{a}{1-q},$$

אויב $n\longrightarrow\infty$

באַ אַנ אומבאַגרענעצטנ פּאַרגרעסערנ די צאָל גלידער פונ אַ פאַלנדיקער ג. פּר. שטרעבט זייער סומע צום לימיט, וועלכער איז גלײַך צום טײלווערט פונעם טײלנ דעם ערשטנ גליד פונ דער פּראָגרעסיע אפ יענער צאָל, אפ וועלכער דער אײנס שטײַגט אַריבער דעם דײַטער פונ דער פּראָגרעסיע.

באַמערקונג. די דאָזיקע אײגנשאַפט געהערט דער ג. פּר. אויכ באַ אַ נעגאַטיוונ דײַטער. צום בײַשפּיל, דער לימיט פאַר דער סומע פונ די גלידער באַ אַ ג. פּר.



צייכ. 28.

$$\div 2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$$

באַ וועלכער $a = 2$ אונ $q = -\frac{1}{2}$, איז גלײַכ:

$$\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

אפ דער בײַליגנדיקער צייכענונג איז געשילדערט אַ רײ אָרדינאַטנ, וועלכע דריקנ אויס אָנשווילעכ די פאַרגלײַכלעכע גרייס פונ דער סומע פונ אײנעם, צוויי, דרײַ, פיר א. א. וו. גלידער פונ דער געגעבענער פּראָגרעסיע. די דאָזיקע אָרדינאַטנ ווערנ קעסיידער, דאָ גרעסער פונ $1\frac{1}{3}$, דאָ קלענער פונ $1\frac{1}{3}$, דערנעענטערנדיק זיכ צו דער דאָזיקער צאָל אַלצ מער אונ מער (צייכ. 28).

88. די אָנווענדונג פונ אַ ג. פּר. צו דעצימאַלע פּעריאָדישע ברוכצאָלנ. לאָמיר נעמענ פאָלגנדיקע צוויי בײַשפּילנ פונ דעצימאַלע פּעריאָדישע ברוכצאָלנ (רײנע, ד. ה. אַזעלכע, וואָס דער פּעריאָד הייבט זיכ באַ זיי אָנ באַלד נאָכ דער קאָמע):

$$1)\ 0{,}999\ \ldots$$

אונ

$$2)\ 0{,}232323\ldots$$

די דאָזיקע ברוכצאָלנ שטעלנ מיט זיכ פאָר סומעס:

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots+\frac{23}{100}+\frac{23}{10\,000}+\frac{23}{1\,000\,000}+\ldots$$

די כיבערצאָלנ פונ די דאָזיקע סומעס זײַנענ גלידער פונ אומענדלעכ-פאַלנדיקע ג. פּר., וואָס די דײַטערס פונ דער פּראָגרעסיע זײַנענ באַ זיי: באַ דער ערשטער $\frac{1}{10}$, באַ דער צווייטער $\frac{1}{100}$. די דאָזיקע סומעס שטרעבנ צו לימיטנ, וועלכע זײַנענ גלײַכ:

$$\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10-1} = \frac{9}{9} = 1\,; \quad \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{100-1} = \frac{23}{99},$$

פונ די דאָזיקע בײַשפּילנ איז קענטיק, אַז
דער לימיט, צו וועלכנ עס שטרעבט א ריינע פּעריאָדישע ברוכצאָל, ווענ די צאָל פּעריאָדנ וואַקסט אויס אומבאַגרענעצט, איז גלײַכ צו אַזאַ געוויינלעכער ברוכ־צאָל, וואָס דער ציילער אירער איז דער פּעריאָד און דער דײַטער איז די ציפֿער 9, איבערגעכאַזערט אַזויפֿיל מאָל, וויפֿל עס איז פֿאַראַנ ציפֿער אינעם פּעריאָד.

לאָמיר איצטער נעמענ צוויי בײַשפּילנ פונ פּעריאָדישע ברוכצאָלנ געמישטע (ד. ה. אַזעלכע, וואָס דער פּעריאָד הייבט זיכ באַ זיי אָנ ניט באַלד נאָכ דער קאָמע):

$$3)\ 0{,}2888\ldots$$

און

$$4)\ 0{,}3545454\ldots$$

די דאָזיקע ברוכצאָלנ קאָנ מענ פֿאָרשטעלנ אינ דער פֿאָרמ פונ סומעס:

$$\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1\,000}+\frac{8}{10\,000}+\cdots$$

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1\,000}+\frac{54}{100\,000}+\frac{54}{10\,000\,000}+\cdots$$

די כיבערצאָלנ פונ די דאָזיקע סומעס, אָנהייבנדיק פונ דער צווייטער, זײַנענ גלידער פונ אומענדלעכ־פֿאַלנדיקע ג. פּר.; אינ דער דריטער סומע איז דער דײַטער די ברוכצאָל $\frac{1}{10}$, אינ דער פֿערטער סומע—די ברוכצאָל $\frac{1}{100}$. דעריבער וועלנ די לימיטנ, צו וועלכע עס שטרעבנ די דאָזיקע סומעס, זײַנ:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2.9+8}{90}=$$

$$=\frac{2.10-2+8}{90}=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}.$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3.99+54}{990}=$$

$$=\frac{3.100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

פונ די דאָזיקע בײַשפּילנ איז קאָנטיק, אַז
דער לימיט, צו וועלכנ עס שטרעבט א געמישטע פּעריאָדישע ברוכצאָל, ווענ די צאָל פּעריאָדנ שטײַגט אומבאַגרענעצט, איז גלײַכ צו אַזאַ געוויינלעכער ברוכצאָל

בא וועלכער דער ציילער איז א צאָל, וואָס שטייט ביז דעם צווייטנ פעריאָד, אָנ דער צאָל, וואָס שטייט ביזנ ערשטנ פעריאָד, אונ דער דיַיטער איז די ציפער 9, איבער־געכאזערט אזויפיל מאָל, וויפל ציפער עס איז אינ פעריאָד, מיט אזויפיל נולנ אפנ סאָפ, וויפל ציפער עס איז צווישנ דער קאָמע אונ דעם פעריאָד.

גענייטונגענ.

געפינט דעם לימיט פונ פאָלגנדיקע אומענדלעכע סומעס:

140. $3+1+\frac{1}{3}+\ldots$ $\qquad 8-4+2-\ldots$

141. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ $\qquad 1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\ldots$

142. $1+\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\ldots$ $\qquad 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots\ (b<a).$

143. $1+x+x^2+x^3+\ldots(x<1).$

144. $1-x+x^2-x^3+\ldots(x<1).$

145. דער לימיט פונ דער סומע פונ אנ אומענדלעכער ג. פר. איז גלייַכ $7\frac{1}{2}$, אונ די סומע פונ די ערשטע צוויי גלידער איז גלייַכ צו $6\frac{2}{3}$, געפינט דעם 6־טנ גליד פונ דער פּראָגרעסיע.

146. געפינט די פּינקטלעכע גרייטנ פונ די פעריאָדישע ברוכצאָלנ:

$0{,}777\ldots,\quad 2{,}7171\ldots,\quad 0{,}(142857),\quad 0{,}3(8),\quad 1{,}41(26),\quad 0{,}17(21).$

147. אינ א קוואדראט מיט דער זייַט a איז אריַינגעשריבנ אנ אנדער קוואדראט, וואָס זייַנע שפּיצנ ליגנ אינ די מיטנס פונ די זייַטנ באַם געגעבענעם קוואדראט. אינ דעם דאָזיקנ קוואדראט איז אריַינגעשריבנ אפנ זעלביקנ אופנ א דריטער קוואדראט, אינעם דריטנ איז אריַינגעשריבנ א פערטער א. א. וו. אָנ א סאָפ. געפינט דעם לימיט פאר דער סומע פונ די שעטעכנ אונ דעם לימיט פאר דער סומע פונ די פערימעטערס פונ אלע קוואדראטנ.

זעקסטער אָפּטייל.

פאראלגעמײנערונג פונעם באגריף וועגן ווײַזערס.

I. גאנצע מאדרייגע-ווײַזערס.

89. אייגנשאפטן פון גאנצע פּאָזיטיווע ווײַזערס. ביז איצטער זײַנען בא אונדז די מאדרייגע-ווײַזערס געווען אָנגענומענע פאר גאנצע און פּאָזיטיווע, דערבײַ פלעגן מיר זיי צוגעבן דעם זין, וואָס איז אויסגעדריקט אין פאָלגנדיקער דעפיניציע:

דערהייבן די צאָל a אין א מאדרייגע מיט א גאנצן און פּאָזיטיוון מאדרייגע-ווײַזער n באַטײַט געפינען דעם קייפל-פּראָדוקט פון n אַלציינע מיטקייפּלערס $aaa... a$

לאָמיר איבערכאזערן די אייגנשאפטן פון די דאָזיקע ווײַזערס, וואָס זײַנען אונדז באקאַנט פון די פריִערדיקע קאפּיטלען אלגעברע:

1) באם קייפלען מאדרייגעס פון איינער און דער זעלביקער צאָל ווערן זייערע מאדרייגע-ווײַזערס צונויפגעלייגט;

2) באם טיילן מאדרייגעס פון איינער און דער זעלביקער צאָל ווערט דער מאדרייגע-ווײַזער פונעם טיילער אראָפּגענומען פונעם מאדרייגע-ווײַזער פון דער כילעקצאָל, אויב דער מאדרייגע-ווײַזער פונעם טיילער איז ניט גרעסער פונעם מאדרייגע-ווײַזער פון דער כילעקצאָל;

3) יעטווידער צאָל, דערהייבן אין דער נוליקער מאדרייגע, גיט אַן איינס;

4) פון דערהייבן א נעגאטיווע צאָל אין א מאדרייגע מיט א גראָדן מאדרייגע-ווײַזער באקומט זיך א פּאָזיטיווע צאָל, און מיט אַן אומגראָדן ווײַזער—א נעגאטיווע;

5) קעדיי צו דערהייבן אין א מאדרייגע א קייפל-פּראָדוקט, איז גענוג צו דערהייבן אין דער דאָזיקער מאדרייגע יעטווידער מיטקייפלער באזונדער;

6) קעדיי צו דערהייבן א מאדרייגע אין א מאדרייגע, איז גענוג איבערצוקייפּלען די מאדרייגע-ווײַזערס פון די דאָזיקע מאדרייגעס;

7) קעדיי צו דערהייבן אין א מאדרייגע א ברוכצאָל, איז גענוג צו דערהייבן אין דער דאָזיקער מאדרייגע באזונדער דעם ציילער און דעם דײַטער;

8) קעדיי צו דערהייבן א ראדיקאל אין א מאדרייגע, איז גענוג צו דערהייבן אין דער דאָזיקער מאדרייגע דעם אונטערראדיקאלן אויסדרוק;

9) קעדײ ארױסצוציִען א װאָרצל פֿון א מאדרײגע, איז גענוג צו צעטײלן דעם מאדרײגע־װײַזער אפֿן װאָרצל־װײַזער, אויב באַם צעטײלן באַקומט זיך א גאַנצע צאָל.

איצטער װעלן מיר פֿארברײטערן דעם באַגריף װעגן װײַזערס, אַרײַנפֿירנדיק װײַזערס נעגאטיװע, און ברוכצאָליקע, װעלכע מיר האָבן ביז איצטער ניט גענוצט. מיר װעלן דערבײַ דערזען, אַז אַלע אײגנשאַפֿטן פֿון גאַנצע פּאָזיטיװע װײַזערס װערן אײַנגעהיט אויך פֿאַר װײַזערס נעגאַטיװע און ברוכצאָליקע.

90. נולי̇קער װײַזער. א נוליקער װײַזער באַקומט זיך, װען די כּילעקצאָל און דער טײלער האָבן די זעלביקע װײַזערס.

זאָל מען, צום בײַשפּיל, דאַרפֿן טײלן a^5 אַף a^5.

אָנװענדנדיק דעם קלאַל (2) פֿון § 89 באַקומען מיר:

$$a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$$

אָבער נול, װי א מאדרײגע־װײַזער, האָט ניט יענע באַדײַטונג, װאָס פּאָזיטיװע און נעגאַטיװע װײַזערס, װײַל מע קען דאָך ניט איבערכאַזערן א צאָל, װי א מיט־קײפֿלער נול מאָל. קעדײ צו אַנטדעקן דעם זין פֿון דעם אויסדרוק a^0, דאַרף מען צוגײן צו דער פֿראַגע װעגן טײלן a^5 אַף a^5 פֿון אַן אַנדער זײַט. מיר װײסן, אַז פֿון טײלן א באַליביקע צאָל (װאָס איז ניט נול) אַף א גלײַכער צאָל באַקומט זיך דער טײלװערט אײנס. הײסט דאָס, אויב

$$a^5 : a^5 = a^0,$$

איז אין דער זעלביקער צײַט אויך ריכטיק, אַז

$$a^5 : a^5 = 1.$$

די לעצטע גלײַכקײט גיט אונדז דאָס רעכט צו מאַכן דעם אויספֿיר, אַז **יעדער צאָל (אויסער נול) אין דער נול־מאדרײגע איז גלײַך צו אײנס.**

עס איז לײַכט צו איבערצײַגן זיך, אַז די פֿריִער אָנגעװיזענע אײגנשאַפֿטן פֿון גאַנצע פּאָזיטיװע װײַזערס קענען אָנגעװענדט װערן אויך צו א נול־װײַזער. צום בײַשפּיל:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m; \ (a^m)^0 = a^{m0} = a^0 = 1$$

א. א. װ.

91. נעגאַטיװע גאַנצע װײַזערס. לאָמיר אָפּרײדן באַם טײלן מאדרײגעס פֿון אײנער און דער זעלביקער צאָל אַראָפּצונעמען דעם װײַזער פֿונעם טײלער פֿון װײַזער פֿון דער כּילעקצאָל אויך אין דעם פֿאַל, װען דער װײַזער פֿונעם טײלער איז גרעסער פֿונעם װײַזער פֿון דער כּילעקצאָל. דעמלט װעלן מיר באַקומען אינעם טײלװערט א בוכשטאַב מיט א נעגאַטיװן װײַזער; צום בײַשפּיל: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. אַף אַזא אויפֿן װעלן מיר אָפּרײדן צו באַנוצן א צאָל מיט א נעגאַטיװן װײַזער, קעדײ צו באַצײכענען דעם טײלװערט באַם טײלן די מאדרײגעס פֿון דער דאָזיקער צאָל אין יענעם פֿאַל, װען דער מאדרײגע־װײַזער באַם טײלער שטײַגט איבער דעם מאדרײגע־װײַזער בײַ דער כּילעקצאָל אַף אַזױפֿיל אײנסן, װיפֿל אײנסן עס

געפינט זיכ אינ דער אבסאָליוטער גרייס פונעמ נעגאַטיוונ ווײַזער. אַזוי אַרומ באַטײַט a^{-2} דעמ טיילוועדס $a:a^3$, אָדער $a^2:a^4$, אָדער $a^3:a^5$, ביכלאַל דעמ טיילוועדס $a^m:a^{m+2}$.

די אינ דעמ דאָזיקנ זינ פאַרשטאַנענע צאָל מיט א נעגאַטיוונ מאַדרייגע־ווײַזער איז גלײַכ צו דער ברוכצאָל, בא וועלכער דער ציילער איז 1, אונ דער דײַטער איז די זעלביקע צאָל, נאָר מיט א פּאָזיטיוונ מאַדרייגע־ווײַזער, וועלכער איז גלײַכ צו דער אבסאָליוטער גרייס פונעמ נעגאַטיוונ מאַדרייגע־ווײַזער.

אינדערעמעסנ דאַרפנ מיר לויט אונדזער באַדינג, האָבנ:

$$a^{-1}=\frac{a^m}{a^{m+1}};\quad a^{-2}=\frac{a^m}{a^{m+2}};\quad x^{-3}=\frac{x^m}{x^{m+3}}$$

א. א. וו.

אַז מיר וועלנ פאַרקירצנ די ערשטע צוויי ברוכצאָלנ אַפּ a^m אונ די דריטע ברוכצאָל אַפּ x^m (ד. ה., אַז מיר וועלנ אינ ביידע פאַלנ פאַרקירצנ די ברוכצאָלנ אַפּנ ציילער), וועלנ מיר באַקומענ:

$$a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^{-2}=\frac{1}{a^2};\quad x^{-3}=\frac{1}{x^3}$$

א. א. וו.

ביכלאַל:

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}.$$

מיר וועלנ אָפּמערקנ, אַז נעגאַטיווע מאַדרייגע־ווײַזערס גיבנ די מעגלעכקײַט פאָרצושטעלנ יעטווידער ברוכצאָליקנ אַלגעבראַישנ אויסדרוק אינ דער געשטאַלט פונ א גאַנצנ; צוליב דעמ דאַרפ מענ בלויז אַלע קייפלערס פונעמ דײַטער אַריבער־טראָגנ אַלס קייפלערס אינעמ ציילער, נעמענדיק זיי מיט נעגאַטיווע ווײַזערס. צומ בײַשפּיל:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

92. אַקטנ איבער מאַדרייגעס מיט נעגאַטיווע ווײַזערס.

מיר וועלנ זיכ איצטער דערקונדיקנ, אַז אַלע אַקטנ איבער מאַדרייגעס מיט נעגאַטיווע ווײַזערס קאָנ מענ דורכמאַכנ לויט די זעלביקע קלאָלימ, וועלכע זײַנענ פריִער אַרויסגעפירט געוואָרנ פאַר פּאָזיטיווע ווײַזערס. ס'איז גענוג אויפצודעקנ דאָס בלויז פאַר קייפל אונ פאַר דערהייבנ אינ א מאַדרייגע, ווײַל די קלאָלימ פונ די פאַרקערטע אַקטנ—כילעק אונ אַרויסציִענ א וואָרצל — זײַנענ א פּאָשעטער אויספיר פונ די קלאָלימ פאַר די דירעקטע אַקטנ: קייפל אונ דערהייבנ אינ א מאַדרייגע.

קייפּל. עס שטייט פאָר צו באווייַזנ, אז באמ קייפּלענ מאדרייגעס ווערנ די ווייַזערס פונ אלציינע בוכשטאבנ צונויפגעלייגט אויכ אינ יענעמ פאל, ווענ די דאָ־זיקע ווייַזערס זייַנענ נעגאטיווע. צומ בייַשפּיל, לאָמיר זיכ דערקונדיקנ, אז:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-2+(-3)} = a^{-5}.$$

אינדערעמעסנ, אז מיר וועלנ פארבייַטנ מאדרייגעס מיט נעגאטיווע ווייַזערס אפּ ברוכצאָלנ און וועלנ דורכמאכנ דעמ אקט פונ קייפּל לויט די קלאָלימ, וואָס זייַנענ שייַעכ צו ברוכצאָלנ, וועלנ מיר באקומענ:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

פונקט אזוי איז:

$$x^{-4} \cdot x^3 = x^{-4+3} = x^{-1},$$

ווייַל

$$x^{-4} \cdot x^3 = \frac{1}{x^4} \cdot x^3 = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

דערהייבנ אינ א מאדרייגע. מע דארפ באווייַזנ, אז בא דערהייבנ אינ א מאדרייגע ווערנ די מאדרייגע־ווייַזערס איבערגעקייפּלט אויכ אינ יענעמ פאל, ווענ זיי זייַנענ נעגאטיווע. צומ בייַשפּיל, לאָמיר זיכ דערקונדיקנ, אז

$$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\cdot(-4)} = a^{12}.$$

אינדערעמעסנ:

$$(a^{-3})^{-4} = \frac{1}{(a^{-3})^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{a^{12}}} = a^{12}.$$

פונקט אזוי איז:

$$(x^3)^{-4} = x^{-12},$$

ווייַל

$$(x^3)^{-4} = \frac{1}{(x^3)^4} = \frac{1}{x^{12}} = x^{-12}.$$

בייַשפּילנ:

1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0{,}8ab^{-3}c^4) = 2{,}4a^{-1}b^{-1}c.$

2) $(x^{-1}y^3z^2):(5x^2y^{-2}z^3) = \frac{1}{5}x^{-3}y^5z^{-1}.$ 3) $(2ax^{-3})^{-2} = 2^{-2}a^{-2}x^6.$

4) $(x^{-2} - y^{-1})^2 = (x^{-2})^2 - 2x^{-2}y^{-1} + (y^{-1})^2 = x^{-4} - 2x^{-2}y^{-1} + y^{-2}$

5) $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3} - b) = a^{-4}b^{-6});$ 6) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3}} = 3p^{-3}p^{-1}.$

גענימונגען

148. רעכנט אויס פאָלגנדיקע אויסדרוקן:

$$5^{-2};\quad 10^{-1};\quad 2^{-4};$$

$$(-1)^{-1};\quad (-2)^{-2};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3};\quad (0{,}1)^{-2};$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3};\quad (0{,}3)^{-4}.$$

פאָלגנדיקע אויסדרוקן שטעלט פאָר אָן א דעַטער:

149. $\frac{1}{a^2b};\quad \frac{2}{a^3b^4};\quad \frac{3a}{x};\quad \frac{x}{3ay^2z^3};$

150. $\frac{a}{a+x};\quad \frac{2}{a-x};\quad \frac{3ab}{(1+x)^2(1-x)}.$

מאכט די אָנגעוויזענע אקטן:

151. $7a^3b^{-1}\cdot 2ab^3;\quad 4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2}\cdot 2a^{-4}x^3y^5;$

152. $a^8 : a^{-1};\quad x^{-2} : x;\quad x^2 : x^2;\quad x^{-2} : x^2.$

153. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5};\quad 25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^2x^3.$

154. $(a^{-2})^4;\quad (a^2)^{-4};\quad (a^{-2})^{-4}.$

155. $(2a^2b^{-3})^2;\quad \left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}.$

156. $\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)\right]^{-3};\quad \sqrt{3a^{-2}}\quad \sqrt{27x^{-12}y^6}.$

157. $(2a^{-1}-1);\quad (2a^{-1}+1);\quad (a^{-2}-a^{-1})^2.$

II. בּרוכצאָליקע וועַזערס.

93. איִן וואָס פאַר א זיִן ווערן באַנוצט בּרוכצאָליקע וועַזערס. מיר האָבּן געזען (§ 15), אז באַם ארויסציִען א וואָרצל פון א מאדרייגע טייַלט מען דעם מאדרייגע־וועַזער אפּן וואָרצל־וועַזער, אויב באַם טייַלן באַקומט זיך א גאַנצע צאָל; צום בּיַישפּיל: $\sqrt{a^4}=a^2$; $\sqrt[3]{x^9}=x^3$ א. א. וו. מיר וועלן איצטער אָפּריידן, א מיר פארשפּרייטן דעם דאָזיקן קלאַל אויך אפּ יענע פאַלן, ווען באַם טייַלן דעם מאדרייגע־וועַזער אפּן וואָרצל־וועַזער באַקומט זיך ניט קיין גאַנצע צאָל. צום בּיַי־שפּיל, מיר וועלן אָפּריידן אָנצונעמען, אז:

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}};\quad \sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}};\quad \sqrt[3]{z^5}=z^{\frac{5}{3}}.$$

ביכלאל לאָמיר אָפּריידנ, אַז:

דער אויסדרוק $a^{\frac{m}{n}}$ באַטײַט א וואָרצל, וואָס זײַנ וואָרצל־ווײַזער איז דער דײַטער, אונ דער מאדרייגע־ווײַזער פונ דער אונטערראדיקאלער צאָל איז דער ציילער פונעם ברוכצאָליקנ ווײַזער (ד. ה. $\sqrt[n]{a^m}$).

מיר וועלנ נאָכ אָפּריידנ צו דערלאָזנ אויכ נעגאטיווע ברוכצאָליקע ווײַזערס אינ דעם זעלביקנ זינ, אינ וועלכנ מיר האָבנ דערלאָזנ נעגאטיווע גאנצע ווײַזערס; צום בײַשפּיל, לאָמיר אָפּריידנ, אַז:

$$a^{-\frac{3}{4}}=\frac{a^m}{a^{m+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\ [1]$$

94. די גרונט־אייגנשאפט פונ א ברוכצאָליקנ ווײַזער. די גרייס פונ דער מאדרייגע מיט א ברוכצאָליקנ ווײַזער וועט זיכ ניט ענדערנ, אויב מיר וועלנ קייפלענ אָדער צעטיילנ אפּ איינער אונ דער זעלביקער צאָל (וואָס שיידט זיכ אונ־טער פונ נול) דעמ ציילער אונ דעמ דײַטער פונעמ ברוכצאָליקנ ווײַזער.

אזוי ארום:

$$a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{6}{4}}=a^{\frac{\ }{6}}=\dots;\quad x^{\frac{\ }{6}}=x^{\frac{\ }{3}}.$$

ביכלאל:

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}.$$

אינדערעמעסנ, דער דײַטער פונעמ ברוכצאָליקנ ווײַזער באַטײַט דעמ וואָרצל־ווײַזער, אונ זײַנ ציילער באַטײַט דעמ ווײַזער פונעמ אונטערראדיקאלנ אויסדרוק, אונ אזוינע ווײַזערס קאָנ מענ, ווי מיר האָבנ געזענ אינ § 14, קייפלענ אונ טיילנ אפּ איינער אונ דער זעלביקער צאָל.

שטיצנדיק זיכ אפ דער דאָזיקער אייגנשאפט, קאָנענ מיר אומבילדנ א ברוכצאָליקנ ווײַזער פונקט אזוי, ווי א פּאָשעטע ברוכצאָל; צום בײַשפּיל, מיר קאָנענ פּארקירצנ דעמ ברוכצאָליקנ ווײַזער אָדער ברענגענ עטלעכע ברוכצאָליקע ווײַזערס צו איינ דײַטער.

95. אקטנ איבער מאדרייגעס מיט ברוכצאָליקע ווײַזערס. עס שטייט פּאָר צו דערווײַזנ, אַז צו ברוכצאָליקע ווײַזערס לאָזנ זיכ אָנווענדנ די קלאָלימ, וואָס זײַנענ פריִער ארויסגעפירט פאר גאנצע ווײַזערס. דאָס איז גענוג אויפצווײַזנ בלויז פאר קייפל אונ פאר דערהייבנ אינ א מאדרייגע, ווײַל די קלאָלימ פונ טיילעק אונ ארויסציִענ א וואָרצל זײַנענ אנ אויספיר פונ די קלאָלימ פונ קייפל אונ דערהייבנ אינ א מאדרייגע.

---

[1]) ברוכצאָליקע ווײַזערס האָט ארײַנגעפירט אינ אלגעברע דערהויפּט דער האָלענדישער אינזשענער סימאָנ סטעווינ אָנהייב XVII יאָרהונדערט. שפּעטער, סאָפּ XVII יאָרהונדערט, האָט דער אָקספאָר־דער פּראָפעסער דזשאָנ וואליס אײַנגעפירט אינ געברויכ נעגאטיווע ווײַזערס.

קייפל. לאָמיר באווײַזנ, אז בא קייפל ווערנ די מאדרייגע-ווײַזערס פונ אלצייניע בוכשטאבנ צונויפגעלייגט אויכ דעמלט, ווענ די דאָזיקע ווײַזערס זײַנעג ברוכצאָליקע. צום בײַשפּיל, לאָמיר זיכ דערקונדיקנ, אז:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

צוליב דעם לאָמיר פאָרשטעלנ די מאדרייגעס מיט ברוכצאָליקע ווײַזערס אינ דער פאָרמ פונ ראדיקאלנ און לאָמיר דורכמאכנ דעם קייפל לויטנ קלאל פאר קייפל פונ ראדיקאלנ (§ 18):

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[15]{a^{22}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

דער רעזולטאט האָט זיכ באקומענ דער זעלביקער, וועלכנ מיר האָבנ באקומענ נאָכנ צונויפלייגנ די ווײַזערס; הייסט עס, אז דער קלאל וועגנ צונויפלייגנ די ווײַזערס (בא קייפל) קאָנ מענ אָנווענדנ אויכ פאר ברוכצאָליקע ווײַזערס.

אפ אזא אופנ איז:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

דערהייבנ אינ א מאדרייגע. לאָמיר באווײַזנ, אז באם דערהייבנ א מאד־רייגע אינ א מאדרייגע קאָנ מענ די ווײַזערס פונ די דאָזיקע מאדרייגעס איבער־קייפלענ אויכ דעמלט, ווענ די דאָזיקע ווײַזערס זײַנענ ברוכצאָליקע. צום בײַשפּיל לאָמיר זיכ דערקונדיקנ, אז:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}.$$

אינדערעמעסנ, פארבײַטנדיק אפ ראדיקאלנ די מאדרייגעס מיט ברוכצאָליקע ווײַזערס און דורכפירנדיק די אקטנ איבער די ראדיקאלנ, וועלנ מיר באקומענ:

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[15]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}$$

אויב די ווײַזערס זײַנענ ניט בלויז ברוכצאָליקע צאָלנ, נאָר אויכ נעגאטיווע, קאָנ מענ אויכ דעמלט צו זיי אָנווענדנ די קלאָלימ, וואָס זײַנענ פריִער דערוויזנ גע־וואָרנ פאר פּאָזיטיווע ווײַזערס. צום בײַשפּיל:

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} =$$

$$= a^{-\frac{m}{n}-\frac{\;}{\;}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

96. בײַשפּילן אַף אַקטן מיט ברוכצאָליקע און נעגאַטיווע ווײַזערס

$$1)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=$$

$$=a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc}.$$

$$2)\ \sqrt{12a^{-4}b^3}:\left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2}=$$

$$=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^3\sqrt{ab}.$$

געניטונגען.

אַכט די אָנגעוויזענע אַקטן:

158. $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\cdot 5a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}$.

159. $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}:4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$; $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$.

160. $\sqrt[3]{3a^2b}:4ab^3$; $\sqrt[12]{x^5}:x^{\frac{1}{4}}$.

161. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

162. $\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $4\left(a^2b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

163. $\left(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

164. $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{3}}}$; $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$.

165. $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

166. $\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

.167 פֿנעמענדיק, אַז (אונערעכ):

$$10^{0,30103}=2$$

און

$$10^{0,47712}=3,$$

שטעלט פֿאָר אין דער פֿאָרם פֿון מאַדרייגעס פֿון 10 די פֿאָלגנדיקע צאָלן:

4 ,8 ,16 ,9 ,24 ,6 ,12 ,18 ,5.

.III באַגריף וועגן איראַציאָנעלן ווײַזער.

.87 דער מאַדרייגע a^α, אין וועלכער α איז אַ וועלכע עס איז איראַציאָנעלע צאָל, גיט מען צו אַ זין בלויז דעמלט, ווען דער באַזיס פֿון דער מאַדרייגע a איז אַ וואָסערע עס איז פּאָזיטיווע צאָל, וואָס איז ניט גלײַך צו 1. דערבײַ קאָנען זיך פֿאָרשטעלן פֿאָלגנדיקע דרײַ פֿאַלן:

א) $a>1$ און α איז אַ פּאָזיטיווע איראַציאָנעלע צאָל, צום בײַשפּיל $10^{\sqrt{2}}$.

לאָמיר באַצייכענען דורך α_1 יעטווידער איראַציאָנעלע אומגעפֿערע באַדײַטונג פֿון דער צאָל α, גענומען מיט אַ מאַנגל, און דורך α_2—יעטווידער אומגעפֿערע ראַציאָנעלע באַדײַטונג פֿון דער צאָל α; גענומען מיט אַן איבערפֿלוס. דעמלט באַטײַט די מאַדרייגע a^α אַזאַ צאָל, וואָס איז גרעסער פֿון יעטווידער מאַדרייגע פֿון a^{α_1}, נאָר קלענער פֿון יעטווידער מאַדרייגע פֿון a^{α_2}. צום בײַשפּיל, $10^{\sqrt{2}}$ באַטײַט אַזאַ צאָל, וואָס איז גרעסער איידער יעדער צאָל פֿון דער ריי:

$$10^{1,4},\quad 10^{1,41},\quad 10^{1,414},\quad 10^{1,4142}\ldots,$$

וואָס אירע ווײַזערס זײַנען געצעונטלטע אומגעפֿערע באַדײַטונגען $\sqrt{2}$, גענומען מיט אַ מאַנגל, נאָר קלענער איידער יעדער צאָל פֿון דער ריי:

$$10^{1,5},\quad 10^{1,42},\quad 10^{1,415},\quad 20^{1,4143}\ldots$$

וואָס אירע ווײַזערס זײַנען געצעונטלטע אומגעפֿערע באַדײַטונגען $\sqrt{2}$, גענומענע מיט אַן איבערפֿלוס.

ב) $a<1$ און α איז, ווי פֿריִער, אַ פּאָזיטיווע איראַציאָנעלע צאָל, צום בײַשפּיל $0,5^{\sqrt{2}}$.

דעמלט פֿאַרשטייט מען אונטער דער מאַדרייגע a^α אַזאַ צאָל, וואָס איז קלענער פֿון יעטווידער מאַדרייגע a^α, נאָר גרעסער פֿון יעטווידער

מאדרייגע a^{α_2}. אשטייגער, $0{,}5^{\sqrt{2}}$ איז א צאָל, וואָס איז קלענער איידער יעדער צאָל פונ דער ריי:

$$0{,}5^{1{,}4},\quad 0{,}5^{1{,}41},\quad 0{,}5^{1{,}414},\quad 0{,}5^{1{,}4142}\ldots,$$

אָבער גרעסער איידער יעדער צאָל פונ דער ריי:

$$0{,}5^{1{,}5},\quad 0{,}5^{1{,}42},\quad 0{,}5^{1{,}415},\quad 0{,}5^{1{,}4143}\ldots$$

אפ אזא אויפנ, אויב די איראַציאָנעלע צאָל α איז איינגעשלאָסנ צווישנ צוויי ראציאָנעלע צאָלנ α_1 אונ α_2, איז די מאדרייגע a^{α} איינגעשלאָסנ צווישנ די מאדרייגעס a^{α_1} אונ a^{α_2} סיי דעמלט, ווענ $a > 1$, סיי דעמלט, ווענ $a < 1$.

ג) $a \gtrless 1$ אונ α איז א נעגאטיווע איראציאָנעלע צאָל; צומ ביישפיל:

$$10^{-\sqrt{2}},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}.$$

דעמלט גיט מענ צו דעמ אויסדרוק a^{α} דעמ זעלביקנ זינ, וועלכנ עס האָבנ מאדרייגעס מיט נעגאטיווע ראציאָנעלע ווייזערס. אזוי ארומ:

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

באמ גענויעמ באטראכטנ די טעאָריע פונ איראציאָנעלע ווייזערס ווייזט זיכ ארויס, אז אלע אייגנשאפטנ פונ ראציאָנעלע ווייזערס לאָזנ זיכ אָנווענדנ אויכ צו ווייזערס איראציאָנעלע; אזוי ארומ:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};\quad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

IV. ווייזער-פונקציע.

98. דעפיניציע. א ווייזער־פונקציע רופט זיכ די פונקציע $y = a^x$, וועלכע שטעלט מיט זיכ פאָר א מאדרייגע, וואָס איר באזיס a איז א וואָסערע עס איז שטענדיקע פאָזיטיווע צאָל, וועלכע איז ניט גלייכ צו 1, אונ דער מאדרייגע־ווייזער x איז א פארענדערלעכע צאָל, וואָס קאָנ אָנעמענ אלמעגלעכע באדייטונגענ, פאָזיטיווע אונ נעגאטיווע, גאנצע אונ ברוכצאָליקע, ראציאָנעלע אונ איראציאָנעלע. דערביי ווערט גערעכנט, אז אינ יענעמ פאל, ווענ דער מאדרייגע־ווייזער x איז גלייכ צו א ברוכצאָל אונ, הייסט עס, ווענ a^x באטייט א ראדיקאל פונ א געוויסער מאדרייגע, ווערט פונ אלע באדייטונגענ פונעמ ראדיקאל גענומענ בלויז די אריפמעטישע, ד. ה. די פאָזיטיווע[1].

[1] דער באזיס a ווערט גערעכנט פאר ניט גלייכ צו 1, ווייל בא $a = 1$ וואָלט די מאדרייגע a^x בא יעטווידער באדייטונג פונ x געווענ 1, אונ דעמלט וואָלט זי ניט געווענ אָפהענגיק פונ x. דער באזיס a ווערט נאָכ גערעכנט אויכ פאר א פאָזיטיווע, ווייל בא $a < 0$ וואָלט די מאדרייגע a^x פאר אסאכ באדייטונגען פונ x ניט געגעבנ קיינשום רעאלע צאָל. צומ ביישפיל, בא $a = -4$ אונ בא $x = \frac{1}{2}$ וואָלט די מאדרייגע a^x זיכ פארוואנדלט אינ $\sqrt{-4}$ — $(-4)^{\frac{1}{2}}$), אונ דאָס שטעלט מיט זיכ פאָר אן אויסגעבארנ אויסדרוק.

פונ דעמ, וואָס מיר וויסנ וועגנ מאדרייגע־וואַזערס, דרינגט ארויס, אז די פונק־ציע $y = a^x$ בא יעטווידער באדײַטונג פונ x איז מעגלעכ און האָט אנ אײנציקע באדײַטונג (אדאנק דעמ באדינג צו נעמענ פאר ראדיקאלנ בלויז אנ אריפמעטישנ באדײַט).

99. **אייגנשאפטנ פונ א וואַזער־פונקציע.** לאָמיר באטראכטנ אייניקע אייגנשאפטנ פונ א וואַזער־פונקציע, געדענקענדיק, אז a רעכענענ מיר נאר א פאָזיטיווער צאָל.

1. בא יעטווידער באזע איז די פונקציע a^x פאָזיטיוו, ד. ה. $a^x > 0$.

בא א גאנצנ פאָזיטיוונ x איז $a^x > 0$, א וואָסערע עס זאָל ניט זײַנ די פאָזי־טיווע צאָל a. הייסט עס, דער קלאל, וואָס מיר האָבנ נאָרוואָס ארויסגעזאָגט, איז אינעמ דאָזיקנ פאל ריכטיק.

זאָל זײַנ, אז x איז גלײַכ צו א געוויסער פאָזיטיווער ברוכצאָל, צומ בײַשפיל

$$x = \frac{m}{n}.$$

דעמלט איז:

$$a^x = {}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

אָבער $a^m > 0$, הייסט עס, אז אויכ $\sqrt[n]{a^m} > 0$, ווײַל מיר האָבנ אָפגערעדט נעמענ בלויז די אריפמעטישע באדײַטונג פונ וואָרצל.

לאָמיר אָנעמענ, אז x איז גלײַכ צו א געוויסער נעגאטיווער צאָל, צומ בײַ־שפיל:

$$x = -p$$

דעמלט איז:

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

וואָס פאר א צאָל עס זאָל ניט זײַנ די פאָזיטיווע צאָל p, איז, לויט ווי מיר האָבנ פריער געזאָגט, $a^p > 0$, אָבער דעמלט איז אויכ

$$\frac{1}{a^p} > 0.$$

אויב x איז א צאָל אנ איראציאָנעלע, נעמענ מיר איר אומגעפערע באדײַטונג מיט א באליביקער פינקטלעכקײַט און מיר קאָנענ איבערכאזערנ איג באצוג צו דעמ דאָזיקנ פאל דעמ פאָריקנ געדאנקענגאנג.

אפ אזא אויפנ איז דער פאָסטולאט, וואָס מיר האָבנ ארויסגעזאָגט, ריכטיק פאר יעטווידער x.

2. בא $a > 1$ איז די פונקציע $a^x > 1$, אויב $x > 0$, און $a^x < 1$, אויב $x < 0$ (בא $a < 1$ זײַנענ די אויספירנ פארקערטע).

זאָל x זײַן אַ גאַנצע פּאָזיטיװע צאָל. דעמאָלט איז:

$$a>1;\ a^x>1^x;\ a^x>1.$$

זאָל x זײַן אַ פּאָזיטיװע ברוכצאָל, צום בײַשפּיל $\frac{m}{n}$. דעמאָלט איז:

$$a>1;\ a^m>1;\ \sqrt[n]{a^m}>\sqrt[n]{1};\ \sqrt[n]{a^m}>1;\quad a^{\frac{m}{n}}>1.$$

װעגן אַן איראַציאָנעלן x קאָן מען זאָגן די זעלביקע זאַך, װאָס אין דעם פֿאָריקן פֿאַל. אַפֿאַ אַזאַ אופֿן איז בײַ יעטװידער פּאָזיטיװן x

$$a^x>1.$$

זאָל איצטער x זײַן אַ װאָסערע עס איז נעגאַטיװע צאָל, צום בײַשפּיל $x=-p$. דעמאָלט איז:

$$a^x=a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

אָבער לױט דעם פֿאָריקן איז $a^p>1$. אַזױ אַרום איז:

$$\frac{1}{a^p}<1$$

ד. ה. $a^x<1$.

3. בײַ $a>1$ װאַקסט די פֿונקציע a^x בײַם עס װאַקסט x.

אױב x_1 און x_2 זײַנען צװײ גאַנצע פּאָזיטיװע צאָלן און $x_2>x_1$, איז קלאָר, אַז בײַ $a>1$ װעלן מיר האָבן:

$$a^{x_2}>a^{x_1}.$$

זאָלן איצטער x_1 און x_2 זײַן פּאָזיטיװע ברוכצאָלן, צום בײַשפּיל $x_1=\frac{m}{n}$ און $x_2=\frac{p}{q}$. זאָל אױך $x_2>x_1$, דעמאָלט איז:

$$\frac{p}{q}>\frac{m}{n}.$$

אָדער באַם ברענגען די ברוכצאָלן צו אײן דײַטער:

$$\frac{pn}{qn}>\frac{mq}{qn}.$$

פֿון צװײ גלײַכנאָמיקע ברוכצאָלן מיט אַלצײינע דײַטערס איז יענע גרעסער, װאָס דער צײלער איז בײַ איר גרעסער. אַזױ אַרום איז:

$$pn>mq.$$

אזױװי pn און mq זײַנען גאַנצע צאָלן, קאָן מען צו זײ אָנװענדן דעם פֿאָריקן געדאַנקענגאַנג, און מיר װעלן באַקומען:

$$a^{pn}>a^{mq}.$$

לאָמיר אַרויסציִען פֿון a^{pn} און a^{mq} א וואָרצל פֿון דער מאדרייגע ^{qn}. מיר ווייסן, אז פֿון צוויי וואָרצלען פֿון אן אלציינער מאדרייגע איז יענער גרעסער, וואָס די אונטעראדיקאלע צאָל איז בא אים גרעסער. דעריבער איז:

$$\sqrt[qn]{a^{pn}} > \sqrt[qn]{a^{mq}}.$$

אָדער:

$$a^{\frac{pn}{qn}} > a^{\frac{mq}{qn}}.$$

פארקירצנדיק די ווייזערס, באקומען מיר:

$$a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{m}{n}},$$

ד. ה.

$$a^{x_2} > a^{x_1}$$

100. גראפֿיק פֿון א ווייזער־פֿונקציע. לאָמיר קאָנסטרויִרן א גראפֿיק פֿון פֿאָלגנדיקע דריי ווייזער־פֿונקציעס:

$$1)\ y=2^x;\ 2)\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad 3)\ y=10^x.$$

קעדיי צו קאָנסטרויִרן די גראפֿיקעס פֿון די ערשטע צוויי פֿונקציעס, וועלן מיר געבן דער פֿארענדערלעכער צאָל x א ריי גאנצע באדייטונגען:

$$-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

בא $x=-3$ באַקומען מיר:

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=1:\left(\frac{1}{2}\right)^3=1:\frac{1}{8}=8.$$

אף אן ענלעכן אופֿן וועלן מיר אויסרעכענען די באדייטונגען פֿון y אויך פֿאר אלע איבעריקע באדייטונגען פֿון x.

פֿאר דער פֿונקציע $y=10^x$ איז ניט באקוועם צו נעמען די אָנגעוויזענע באדייטונגען פֿון דער צאָל x, ווייל מיר וואָלטן דעמלט באקומען פֿאר y אזוינע גרויסע צאָלן, וועלכע שטעלן זיך ניט אויס אף דער צייכענונג 29 (צום ביישפּיל בא $x=3$ וואָלטן מיר באקומען $y=10^3=1000$). פֿאר דער דאָזיקער פֿונקציע וועלן מיר נעמען אזוינע ברוכצאָליקע באדייטונגען (וואָס זיינען איינגעשלאָסן צווישן -1 און $+1$):

$$x=-1;\ -\frac{3}{4};\ -\frac{2}{4};\ -\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{4};\ 1.$$

די אנטשפּרעכנדיקע באדייטונגען פֿון y וועלן מיר אויסרעכענען אין אזא אָרדענונג:

$$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt{3{,}162}=1{,}778;$$

$$10^{\frac{2}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162.$$

ווײַטער געפינענ מיר דורכ פּאָשעטנ קײפּלענ אונ טײלנ:

$$10^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{2}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{4}} = 3{,}162 \cdot 1{,}778 = 5{,}62\ \ldots$$

$$10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1{,}778} = \frac{1000}{1778} = 0{,}56\ldots$$

$$10^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{3{,}162} = \frac{1000}{3162} = 0{,}32\ldots$$

$$10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5{,}62} = \frac{1000}{562} = 0{,}17\ldots$$

לאָמיר אויסשרײַבנ די אַלע געפונענע באַדײַטונגענ אינ פאָלגנדיקע דרײַ טאַבעלעס:

1) $y = 2^x$.

$x =$	וואקסט	-3	-2	-1	0	1	2	3	וואקסט
$y =$	וואקסט	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	וואקסט

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$x =$	וואקסט	-3	-2	-1	0	1	2	3	וואקסט
$y =$	פאלט	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	פאלט

3) $y = 10^x$.

$x =$	וואקסט	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	וואקסט
$y =$	וואקסט	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	וואקסט

(אינ דער לעצטער טאַבעלע זײַנענ די צאָלנ פאַרקירצט).

אַז מיר וועלנ אַרופטראָגנ די דאָזיקע באַדײַטונגענ אַפ דער צײכענונג אונ וועלנ דורכפירנ דורכ די באַקומענע פּונקטנ אומיבעררײַסלעכע קרומע, וועלנ מיר

באקומענ (צייכ. 29) דרײַ גראפיקעס פונ די גענומענע פונקציעס (באקוועמער פונ אלצ איז צו מאכנ די צייכענונג אפ מילימעטערדיקע פאפיר, נעמענדיק פאר אנ איינס פונ לענג א סאנטימעטער).

באטראכטנדיק די גראפיקעס פונ ווײַזער־פונקציעס, זעענ מיר אפ זיי אינ אנ אָנשוילעכער שילדערונג פאָלגנדיקע אייגנשאפטנ:

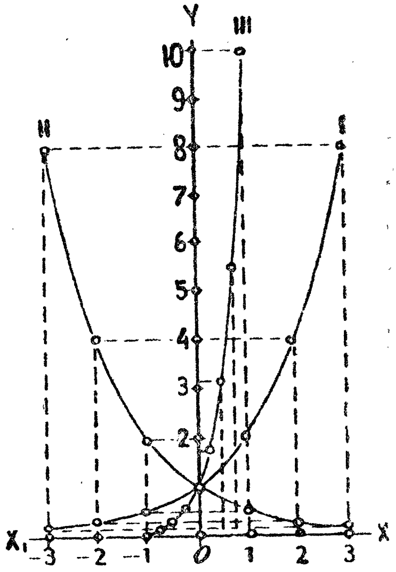
1. בא יעטווידער באזיס איז די פונקציע a^x פאָזיטיוו (אלע קרומע ליגנ העכער פונ דער x־אקס).

2. בא $a > 1$ איז די פונקציע $a^x > 1$, אויב $x > 0$, אונ $a^x < 1$, אויב $x < 0$ (בא $a < 1$ זײַנענ די אויספירנ פארקערטע).

3. ווענ x וואקסט, וואקסט די פונקציע a^x, אויב $a > 1$ (אונ פאלט, אויב $a < 1$).

4. אויב $x = 0$, איז $a^x = 1$ בא יעטווידער a (אלע קרומע גייענ דורכ איינעמ אונ דעמ זעלביקנ פונקט, וואָס ליגט אפ דער y-אקס אונ איז דערווײַטערט פונעמ פונקט 0 אפ $+1$).

5. בא $a > 1$, ווענ x וואקסט, וואקסט די פונקציע אלצ גיכער, וואָס עס איז גרעסער a (די קרומע בא $a = 10$ הייבט זיכ ארופ באדײַטנדיק גיכער, איידער בא $a = 2$).



צייכ. 29.

גענימונגענ.

168. קאָנסטרויִרט א גראפיק פונ דער פונקציע $y = 3^x$ אינ דעמ אינטערוואל פונ $x = 0$ ביז $x = 3$, צוגעבנדיק דעמ ווײַזער באדײַטונגענ:

$$0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ 2\frac{1}{2};\ 3$$

אונ נעמענדיק פאר די אָרדינאטנ אנ איינס, אינ דרײַ מאָל א קלענערג, איידער פאר די אבסציסעס.

169. קאָנסטרויִרט א גראפיק $y = 2^x$ אינ דעמ אינטערוואל פונ $x = -3$ ביז $x = +2$ (פאר אנ איינס לאָמיר אָנעמענ א סאנטימעטער). באנוצנדיק זיכ מיט דער גראפיק, געפינט די אומגעפערע גרייס פונ x, וואָס זאָל באפרידיקנ די גלײַכונג $2^x = 5$.

170. קאָנסטרויִרט א גראפיק פונ דער פונקציע $y = \frac{2x-1}{x+3}$ אינ דעמ אינטערוואל פונ -1 ביז $+4$ (נעמענדיק 2 סמ פאר א לענג־איינס). באנוצנדיק זיכ מיט דער גראפיק, געפינט דעמ y, אויב $x = 1{,}5$ אונ אויב $x = -0{,}5$.

זיבעטער קאַפּיטל.

לאָגאַריפֿמען.

I. אַלגעמיינע אייגנשאַפֿטן פֿון לאָגאַריפֿמען.

101. צוויי אַקטן, פֿאַרקערטע צו דערהייבן אין אַ מאַדרייגע. לאָמיר נעמען די גלייכקייט:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

די דאָזיקע גלייכקייט דריקט מיט זיך אויס אַן אַקט, וואָס רופֿט זיך **דערהייבן אין אַ מאַדרייגע**. אין דעם דאָזיקן אַקט ווערן געגעבן: דער באַזיס פֿון דער מאַדרייגע (די צאָל 2) און דער מאַדרייגע־ווייזער (די צאָל 3), און עס ווערט געזוכט די עצעם מאַדרייגע (8). לאָמיר אַ קוק טאָן, וואָסערע זיינען פֿאַראַן אַקטן, **פֿאַרקערטע** צום דערהייבן אין אַ מאַדרייגע. אַזוינע אַקטן קאָן מען אָנווייזן פֿאָלגנדיקע צוויי:

1. זאָל זיך פֿאָדערן צו דערוויסן זיך, וואָסער צאָל דאַרף מען דערהייבן אין אַ מאַדרייגע מיטן מאַדרייגע־ווייזער 3, קעדיי צו באַקומען די צאָל 12. באַצייכענענדיק די געזוכטע צאָל מיטן בוכשטאַב x, קאָנען מיר אָנשרייבן די גלייכונג: $x^3 = 12$. דער אַקט, דורך וועלכן מע געפֿינט דעם באַזיס x לויט דער געגעבענער מאַדרייגע און לויט דעם געגעבענעם ווייזער, רופֿט זיך **אַרויסציִען אַ וואָרצל**; דאָס באַצייכנט זיך, ווי מיר ווייסן, אַזוי:

$$x = \sqrt[3]{12}.$$

2. לאָמיר זיך פֿאָרשטעלן, אַז מע דאַרף דערוויסן זיך, וואָס פֿאַר אַ ווייזער דאַרף זיין בא דער מאַדרייגע, אין וועלכער מע דאַרף דערהייבן דעם באַזיס 4, קעדיי צו באַקומען 16. באַצייכענענדיק דעם געזוכטן ווייזער מיטן בוכשטאַב x, קאָנען מיר אָנשרייבן די גלייכונג: $4^x = 16$. דער אַקט, דורך וועלכן מע געפֿינט דעם מאַדרייגע־ווייזער לויט דער געגעבענער מאַדרייגע און דעם געגעבענעם באַזיס, רופֿט זיך **געפֿינען דעם לאָגאַריפֿם** פֿון דער געגעבענער צאָל (16) לויט דעם געגעבענעם באַזיס (4). אין אונדזער ביישפּיל איז $x = 2$, ווייל $4^2 = 16$.

אָפּ אַזאַ אויפֿן האָט דאָס דערהייבן אין אַ מאַדרייגע צוויי פֿאַרקערטע אַקטן. לאָמיר שטעלן די פֿראַגע: צי זיינען פֿאַרשיידן די דאָזיקע אַקטן? פֿאַר קיין קאָנען

מיר האָבן אויך אײַנזען צוויי פאַרקערטע אַקטן: דער ערשטער — געפינען די קייפל־צאָל לויט דעם געגעבענעם קייפל־פּראָדוקט און דעם געגעבענעם קייפלער, דער צווייטער — געפינען דעם קייפלער לויט דעם געגעבענעם קייפל־פּראָדוקט און דער געגעבענער קייפל־צאָל. פונדעסטוועגן ווערן די דאָזיקע אַקטן באַטראַכט ניט ווי פאַרשיידענע, נאָר ווי איינער און דער זעלביקער אַקט, וואָס רופט זיך כילעק. די סיבע, פאַרוואָס עס גיסן זיך צונויף די דאָזיקע צוויי פאַרקערטע אַקטן אין איין אַקט, ליגט אין דער קאָמוטאַטיווער אייגנשאַפט פון קייפל, וואָס לויט דער דאָזיקער אייגנשאַפט בײַט זיך ניט דער קייפל־פּראָדוקט, ווען עס בײַטן זיך די ערטער פון דער קייפל־צאָל און דעם קייפלער. אין דער זעלביקער לאַגע געפינט זיך אויך כיבער (פון צוויי כיבערצאָלן): פאַר דעם דאָזיקן אַקט קאָן מען אויך אָנווײַזן צוויי פאַרקערטע אַקטן — געפינען די אומבאַוווסטע צאָל (די ערשטע כיבערצאָל), צו וועלכער מע דאַרף צוגעבן די געגעבענע צאָל (די צווייטע כיבערצאָל), קעדיי צו באַקומען די געגעבענע סומע; דער צווייטער — געפינען די אומבאַוווסטע צאָל (די צווייטע כיבערצאָל), וועלכע מע דאַרף צוגעבן צו דער געגעבענער צאָל (צו דער ערשטער כיבערצאָל), קעדיי צו באַקומען די געגעבענע סומע. פונדעסטוועגן באַטראַכט מען די דאָזיקע צוויי אַקטן ווי איין אַקט, וואָס רופט זיך כיסער, צוליב דעם, וואָס כיבער פאַרמאָגט די קאָמוטאַטיווע אייגנשאַפט, וואָס לויט דער דאָזיקער אייגנשאַפט איז די סומע ניט אָפּהענגיק פון דער אָרדענונג פון די כיבערצאָלן. אויב די דאָזיקע אייגנשאַפט וואָלט געווען שײַעך אויך צום דערהייבן אין אַ מאַדרייגע, וואָלטן דעמלט אויך די צוויי פריִער אָנגעוויזענע פאַרקערטע אַקטן פאַרגעשטעלט, אין טאָך גענומען, איין אַקט. אָבער **דערהייבן** אין אַ מאַדרייגע פאַרמאָגט ניט די קאָמוטאַטיווע אייגנשאַפט, צום בײַשפּיל, 2^3 איז ניט גלײַך צו 3^2, און 10^2 איז ניט גלײַך צו 2^{10} א. א. וו. דאָס געפינען דעם באַזיס לויט דעם געגעבענעם ווײַזער און דער געגעבענער מאַדרייגע (אַרויסציִען אַ וואָרצל) שיידט זיך דעריבער וועזנטלעך אונטער פונעם געפינען דעם ווײַזער לויט דעם געגעבענעם באַזיס און דעם ווײַזער (געפינען דעם לאָגאַריפם).

102. דעפיניציע. לאָגאַריפם פון דער געגעבענער צאָל לויט דעם געגעבענעם באַזיס רופט זיך דער ווײַזער פון דער מאַדרייגע, אין וועלכער מע דאַרף **דערהייבן** דעם דאָזיקן באַזיס, קעדיי צו באַקומען די געגעבענע צאָל.

אויב, צום בײַשפּיל, דער באַזיס וועט זײַן 4, איז:

לאָגאַריפם פון 16 וועט זײַן 2, ווײַל $4^2 = 16$;
〃 〃 64 〃 〃 3, 〃 $4^3 = 64$;
〃 〃 4 〃 〃 1, 〃 $4^1 = 4$;
〃 〃 2 〃 〃 $\frac{1}{2}$, 〃 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;
〃 〃 $\frac{1}{4}$ 〃 〃 -1, 〃 $4^{-1} = \frac{1}{4}$;
〃 〃 $\frac{1}{2}$ 〃 〃 $-\frac{1}{2}$, 〃 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$.

אויב מיר וועלנ נעמענ דעמ באזיס 10, וועט:

לאָגאריפמ פונ 10 זײַנ 1, ווײַל $10^1 = 10$;
" " 100 " 2, " $10^2 = 100$;
" " 1000 " 3, " $10^3 = 1000$;
" " 0,1 " −1, " $10^{-1} = \frac{1}{10}$;
" " 0,01 " −2, " $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

אָנשטאָט צו שרײַבנ: „לאָגאריפמ פונ דער צאָל 16 בא דעמ באזיס 4", שרײַבט מענ פארקירצט אזוי: $\log_4 16$, שטעלנדיק אונטנ באמ צייכנ log יענע צאָל, וועלכע דינט פאר א באזיס. אגעוו, אויב מע ווייס אפריִער, וועלכע צאָל איז אָנגענומענ געוואָרנ פאר א באזיס, שרײַבט מענ זי ניט. אָנשטאָט דעמ צייכנ log (פארקירצונג פונעמ וואָרט „לאָגאריפמ") שרײַבט מענ lg, אויב פאר א באזיס דינט די צאָל 10.

איידער מיר וועלנ ריידנ וועגנ אָנווענדנ לאָגאריפמענ, וועלנ מיר אפריִער באטראכטנ אייניקע אייגנשאפטנ פונ דער אזויגערופענער לאָגאריפמישער פונקציע.

103. די לאָגאריפמישע פונקציע אונ איר גראפיק. אויב אינ דער גלײַכקײַט $y = a^x$ באטראכטנ מיר דעמ ווײַזער x ווי א פארענדערלעכ־אומאָפּהענגיקע, וועט דעמלט y זײַנ די פונקציע פונ x, וועלכע מיר האָבנ פריִער אָנגערופנ ווײַזער־פונקציע. אָבער אויב מיר וועלנ אינ דער דאָזיקער גלײַכקײַט פאר א פארענדערלעכ־אומאָפּהענגיקער האלטנ y, וועט דעמלט x זײַנ א געוויסע פונקציע פונ y, נעמלעכ, איז x דער לאָגאריפמ פונ דער צאָל y בא דעמ באזיס a, וואָס מע קאָנ אויסדריקנ אזוי:

$$x = \log_a y.$$

באצייכענענדיק, ווי אָנגענומענ, די פארענדערלעכ־אומאָפּהענגיקע מיטנ בוכשטאב x, אונ די פונקציע פונ דער דאָזיקער פארענדערלעכער מיטנ בוכשטאב y (ד. ה. פארבײַטנדיק x אפּ y אונ פארקערט), קאָנענ מיר די זעלביקע פונקציע אויסדריקנ אזוי:

$$y = \log_a x.$$

אזא פונקציע רופט זיכ לאָגאריפמישע (זי איז א פארקערטע אינ באצוג צו דער ווײַזער־פונקציע).

לאָמיר קאָנסטרויִרנ א גראפיק פונ פאָלגנדיקע דרײַ לאָגאריפמישע פונקציעס:

$$1)\ y = \log_2 x;\ 2)\ y = \log_{\frac{1}{2}} x;\ 3)\ y = \log_{10} x.$$

צוליב דעמ וועלנ מיר צונויפשטעלנ טאבעלעס פאר די באדײַטונגענ פונ די דאָזיקע פונקציעס. פאָשעטער פונ אלצ קאָנ מענ זיי צונויפשטעלנ פונ טאבעלעס פאר אנטשפרעכיקע ווײַזער־פונקציעס (§ 100):

$$1)\ y = 2^x;\ 2)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ 3)\ y = 10^x,$$

בײַטנדיק אינ די דאָזיקע טאַבעלעס די באַדײַטונגענ פונ דער אבסציסע x אפ די באַ־דײַטונגענ פונ דער אָרדינאַטע y, אונ פאַרקערט. אז מיר וועלנ דאָס אָפּטאָן, וועלנ מיר באַקומענ אַזוינע דרײַ טאַבעלעס:

1) $y=\log_2 x.$

$x=$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=$	-3	-2	-1	0	1	2	3

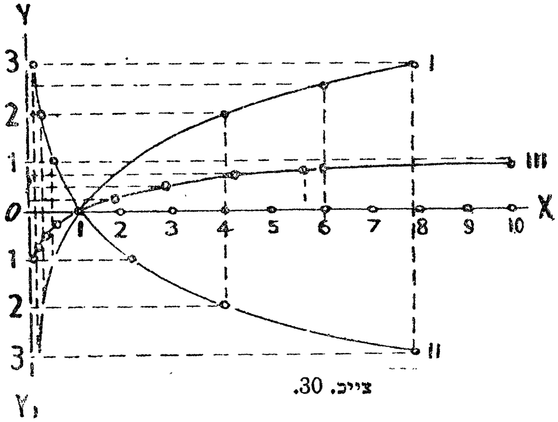
2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x.$

$x=$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=$	-3	-2	-1	0	1	2	3

3) $y=\log_{10} x.$

$x=$	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$y=$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

אויב מיר וועלנ אַרופטראָגנ די דאָזיקע אַלע באַדײַטונגענ אפ דער צייכענונג אונ וועלנ צונויפבינדנ אַלע פונקטנ מיט אומיבערײַסלעכע קרומע, וועלנ מיר באַקו־מענ (צייכ. 30) דרײַ גראַפיקעס פונ די גענומענע פונקציעס.



צייכ. 30.

האָבנדיק א גראַפיק פונ דער לאָגאַריפמישער פונק־ציע, קאָנענ מיר מיט איר הילפ געפינענ דעם אומ־געפערנ לאָגאַריפמ פונ דער צאָל, וואָס געפינט זיכ צווישנ די באַדײַטונגענ x, וואָס זײַנענ גענומענ פאַר דער צייכענונג. לאָמיר נעמענ, צומ בײַשפּיל, די גראַפיק פונ דער פונקציע $y=\log_2 x$ אונ לאָמיר געפינענ מיט איר הילפ $\log_2 6$. צוליב דעמ לאָמיר נעמענ אפ דער צייכענונג די אבסציסע, וואָס איז גלײַכ 6, אונ לאָמיר קאָנסטרויִרנ די אָרדינאַטע, וואָס אנטשפּרעכט איר. אז מיר וועלנ אויסמעסטנ די דאָזיקע אָרדינאַטע, וועלנ מיר געפינענ אנערעכ 2,6; דאָס וועט טאַקע זײַנ $\log 6$.

104. די גרונט־אייגנשאַפטנ פונ לאָגאַריפמענ. לאָמיר נעמענ אַ לאָגאַריפמישע פונקציע

$$y = \log_a x.$$

לויט דער דעפיניציע איז דער דאָזיקער אויסדרוק אידענטיש מיט פאָלגנדיקנ:

$$x = a^y.$$

לאָמיר ארויספירנ אייניקע אייגנשאַפטנ פונ לאָגאַריפמענ.

1) באַ אַ פּאָזיטיוונ באַזיס האָבנ נעגאַטיווע צאָלנ קיינ לאָגאַריפמענ ניט.

באַם באַטראַכטנ די ווײַזער-פונקציע האָבנ מיר געזענ, אַז באַ $a > 0$ איז די פונקציע $a^y > 0$ באַ יעטווידער y. דאָס באַטײַט, אַז וואָסערע עס זאָלנ ניט זײַנ דער (פּאָזיטיווער) באַזיס a אונ דער ווײַזער (לאָגאַריפמ) y, וועט די פונקציע a^y, ד. ה. x, שטענדיק זײַנ אַ פּאָזיטיווע צאָל.

2) באַ יעטווידער באַזיס (וואָס איז ניט גלײַכ צו איינס) וועט דער לאָגאַריפמ פונ איינס זײַנ נול.

אונ אינדערעמעסנ, מיר ווייסנ, אַז באַ יעטווידער a איז:

$$a^0 = 1.$$

אָבער, לויט דער דעפיניציע, באַטײַט עס, אַז;

$$\log_a 1 = 0.$$

3) באַ אַ באַזיס, וואָס איז גרעסער פונ אַנ איינס, זײַנענ די לאָגאַריפמענ פונ צאָלנ, גרעסערע פונ איינס, פּאָזיטיווע, אונ די לאָגאַריפמענ פונ צאָלנ, קלענערע פונ איינס, נעגאַטיווע.

וועגנ דער ווײַזער־פונקציע a^y ווייסנ מיר, אַז באַ $a > 1$, אויב $y > 0$, איז $a^y = x > 1$, אונ אויב $y < 0$, איז $a^y = x < 1$.

אָבער לויט דער דעפיניציע איז y לאָגאַריפמ פונ דער צאָל x. הייסט עס, אַז ווענ די צאָל איז $x > 1$, איז איר לאָגאַריפמ $y > 0$, ד. ה., ער איז פּאָזיטיווּ ווענ אָבער די צאָל איז $x < 1$, איז איר לאָגאַריפמ $y < 0$, ד. ה., ער איז נעגאַטיוו.

באַ $a < 1$ וועלנ די אויספירנ זײַנ פאַרקערטע צו די פאָריקע.

4) דער לאָגאַריפמ פונ דעמ באַזיס גופע איז גלײַכ צו איינס.

אינדערעמעסנ:

$$a^1 = a.$$

פונדאַנענ דרינגט ארויס, אַז:

$$\log_a a = 1.$$

5) בא א באזיס, א גרעסערנ פונ איינס, אנטשפרעכט א גרעסערער צאָל א גרע־סערער לאָגאריפמ.

מיר האָבנ געזענ, אז בא $a>1$ שטײַגט די פונקציע a^y צוזאמענ מיטנ שטײַגנ פונ y. אויב מיר וועלנ באצייכענענ צוויי פארשיידענע באדײַטונגענ פונ y דורכ y_1, y_2, אונ די אנטשפרעכיקע באדײַטונגענ פונ a^y דורכ x_1, x_2, וועלנ מיר האָבנ:

$$a^{y_2} > a^{y_1}$$

אויב

$$y_2 > y_1$$

אָדער:

$$x_2 > x_1$$

אויב

$$y_2 > y_1.$$

אָבער y_1 אונ y_2 זײַנענ אנטשפרעכיק לאָגאריפמענ פונ די צאָלנ x_1 אונ x_2 הייסט עס, אז:

$$x_2 > x_1,$$

אויב

$$\log_a x_2 > \log_a x_1.$$

די אלע אָנגעוויזענע אייגנשאפטנ פונ די לאָגאריפמענ וואָלטנ מיר געקאָנט ארויספירנ, באטראכטנדיק די גראפיק פונ דער לאָגאריפמישער פונקציע. אשטייגער, די ערשטע אייגנשאפט באטײַט, אז די גראפיק פונ דער פונקציע $y=\log_a x$ ליגט אינגאנצנ רעכטס פונ דער y־אקס. די צווייטע אייגנשאפט רעדט וועגנ דעמ, אז די גראפיק פונ דער פונקציע $y_2=\log_a x$ גייט דורכ דורכנ פונקט $(1;0)$. די דריטע אייגנשאפט באטײַט, אז בא $x>1$ זײַנענ די אָרדינאטנ פונ דער קרומער פּאָזיטיווע, אונ בא $x<1$ זײַנענ זיי נעגאטיווע, א. א. וו.

גענינטונגענ.

171. אויב דער באזיס איז גלײַכ צו 2, וואָסערע לאָגאריפמענ וועלנ זײַנ בא די צאָלנ:

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}?$$

172. שרײַבט אָנ מיט דער הילפ פונעמ צייכנ log פאָלגנדיקע גלײַכקײַטנ:

$$10^0=1;\ 10^1=10;\ 10^2=100;\ 10^{-2}=0{,}01;\ a^x=N.$$

173. שרײַבט איבער אָנ דעמ צייכנ log די גלײַכקײַטנ:

$$\log_{10}=1000=3;\ \ \log_{10}0{,}001=-3;\ \log_{16}4=\frac{1}{2};\ \log^a P=y.$$

174. אויב דער באזיס איז 16, וואָסערע לאָגאריפמענ וועלנ זײַנ בא די צאָלנ:

$$16;\ 256;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{256};\ 4;\ \frac{1}{4};\ 2;\ \frac{1}{2}?$$

175. אויב דער באַזיס איז 10, וואָסערע לאָגאַריפמענ וועלנ זײַנ בא די צאָלנ:

$$10;\ 100;\ 1000;\ 10000;\ 0{,}1;\ 0{,}001;\ 0{,}0001?$$

176. שרײַבט אָנ מיט דער הילפ פונעמ צייכנ log פאָלגנדיקע גלײַכקײַטנ:

$$5^2 = 25;\ 7^3 = 343;\ 3^7 = 2187;\ 8^3 = 512.$$

177. געפינט:

$$\log_2 2;\ \log_3 9;\ \log_3 729;\ \log_3 1;\ \log_3 \frac{1}{3};\ \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

178. אויב a איז אַ פּאָזיטיווע צאָל, וואָס שיידט זיכ אונטער פונ 1, איז צו וואָס זײַנענ גלײַכ די אויסדרוקנ:

$$\log_a a^2,\ \log_a a^n;\ \log_a \frac{1}{a};\ \log_a \sqrt{a};\ \log_a \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

179. צו וואָס איז גלײַכ די צאָל x, אויב:

$$1)\ \log_2 x = 3;\ 2)\ \log_5 x = 2;\ 3)\ \log_4 x = -5;\ 4)\ \log_x 4 = 2;\ 5)\ \log_x 2 = -\frac{1}{2}\ ?$$

180. קאָנסטרויִרט די גראַפיק פונ דער פונקציע $y = \log_3 x$, באַנוצנדיק זיכ מיט דער טאַבעלע פאַר די באַרײַטונגענ פונ דער פונקציע $y = 3^x$ (זע אויפגאַבע 168).

105. באַגריפ וועגנ דעמ נוצנ פונ לאָגאַריפמישע טאַבעלעס.

פאַר־שיידענע צאָלנ קאָנ מענ אויסדריקנ ווי מאַדרייגעס פונ איינער אונ דער זעלביקער צאָל, צומ בײַשפּיל, ווי מאַדרייגעס פונ דער צאָל 10. אַזוינע צאָלנ, ווי 10; 100; 1000... אָדער 0,1; 0,01; 0,001 א. א. וו., ווערנ אויסגעדריקט ווי מאַדרייגעס פונ 10 זייער פּאָשעט:

$$10 = 10^1;\ 100 = 10^2;\ 1000 = 10^3 ...;\ 0{,}1 = 10^{-1};\ 0{,}01 = 10^{-2};\ 0{,}001 = 10^{-3}$$

אונ אַז. וו.

אויסצודריקנ אַנדערע צאָלנ דורכ דער מאַדרייגע פונ 10 איז שווערלעכ. אַשטייגער, אַז עס פאָדערט זיכ צו געפינענ דעמ ווײַזער פונ דער מאַדרייגע, אינ וועלכער מע דאַרפ דערהייבנ 10, קעדיי צו באַקומענ 5, קאָנענ מיר בלויז זאָגנ, אַז דער געזוכטער מאַדרייגע־ווײַזער איז גרעסער פונ 0, נאָר קלענער פונ 1, ווײַל $10^0 = 1$, וואָס דאָס איז קלענער פונ 5, אונ $10^1 = 10$, וואָס דאָס איז גרעסער פונ 5; הייסט עס, אַז דער ווײַזער פונ דער מאַדרייגע, אינ וועלכער מע דאַרפ דערהייבנ 10, קעדיי צו באַקומענ 5, דאַרפ זײַנ אַ געוויסע פּאָזיטיווע ברוכצאָל, אַ קלענערע פונ 1. מיר קאָנענ אַפילע זאָגנ, אַז די דאָזיקע ברוכצאָל איז גרעסער פונ $\frac{1}{2}$, נאָר קלענער פונ $\frac{3}{4}$, ווײַל

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162,$$

וואָס דאָס איז קלענער פונ 5, אונ

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = \sqrt{31{,}62} = 5{,}62,$$

וואָס דאָס איז גרעסער פונ 5.

עס זײַנען פֿאראנען אָפּטײלן פֿונ מאטעמאטיק, אינ װעלכע עס זײַנען אָנגעװיזנ די מיטלען, װיַאזױ מע קאָנ פֿאר יעטװידער געגעבענער צאָל N געפֿינען אזא מאדרײגע־װיַזער x, בא װעלכנ די מאדרײגע 10^x איז אָדער פּינקטלעכ גלײַכ צו N אָדער זי שײדט זיכ אונטער פֿונ דער דאָזיקער צאָל װי װײַט װײניק מיר װילנ. די געלערנטע האָבנ זיכ באנוצט מיט די דאָזיקע מיטלענ אונ צונױפֿגעשטעלט די אזױגערופֿענע לאָגאריפֿמישע טאבעלעס, אינ װעלכע עס זײַנען אריַינגעשטעלט פֿארשײדענע צאָלנ אונ לעבנ יעדערער פֿונ די דאָזיקע צאָלנ איז אָנגעװיזנ דער װײַזער פֿונ דער מאדרײגע (לאָגאריפֿם), אינ װעלכער מע דארפֿ דערהײבנ 10, קעדײ צו באקומענ די דאָזיקע צאָל. מיר װעלנ דערקלערנ צו װאָסער ציל קאָנענ דינענ אזױנע טאבעלעס.

זאָלנ מיר דארפֿנ אױסרעכענענ די צאָל x לױט דער פֿאָרמולע:

$$x = \sqrt[5]{40}.$$

ארױסציִענ א װאָרצל פֿונ דער פֿינפֿטער מאדרײגע קאָנענ מיר ניט. אינ אזױנע פֿאלנ קאָנענ אונדז העלפֿנ די לאָגאריפֿמישע טאבעלעס. מיר געפֿינענ אינ די דאָזיקע טאבעלעס די צאָל 40 אונ לעבנ איר דעם לאָגאריפֿמ פֿונ דער דאָזיקער צאָל. זאָל דאָס זײַנ 1,6.... דאָס באטײַט, אז

$$40 \doteq 10^{1,6\ldots},$$

אונ דעריבער איז

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\ldots}},$$

אזױװי באם ארױסציִענ א װאָרצל פֿונ א מאדרײגע טײלט מענ דעם װײַזער פֿונ דער אונטערראדיקאלער צאָל (א װאָסערער ער זאָל ניט זײַנ) אפֿנ װאָרצל־װײַזער, איז

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\ldots}} = 10^{\frac{1,6\ldots}{5}} \doteq 10^{0,32\ldots}.$$

איצטער געפֿינענ מיר אינ די זעלביקע טאבעלעס אינ דער קאָלאָנקע פֿונ די לאָגאריפֿמענ 0,32 אונ לעבנ דעם די געהעריקע צאָל; זאָל דאָס זײַנ, לאָמיר רעכענענ, 2,09.... דאָס װעט טאקע זײַנ די אומגעפֿערע באדײַטונג פֿונ $\sqrt[5]{40}$.

מיר װעלנ אינגיכנ דערזענ, אז די לאָגאריפֿמישע טאבעלעס דערלױבנ אינ אסאכ פֿאלנ דורכצומאכנ אזױנע אקטנ איבער צאָלנ, װאָס אָנ טאבעלעס װאָלטנ מיר זײ אָדער גאָרניט געקאָנט מאכנ (װי אינ דעם נאָרװאָס געװיזענעם בײַשפּיל), אָדער עס װאָלט זיכ געפֿאָדערט אפֿ דורכמאכנ זײער אסאכ צײַט.

איצטער שטײט אונדז פֿאָר צו באקאָנענ זיכ, ערשטנס, מיט דעם, װיַאזױ באם מאכנ א װעלכנ עס איז אקט איבער געגעבענע צאָלנ קאָנ מענ געפֿינענ דעם לאָגאריפֿמ פֿונ דער געזוכטער צאָל מיט דער הילפֿ פֿונ לאָגאריפֿמענ פֿונ די דאָזיקע געגעבענע צאָלנ (גענומענע פֿונ די טאבעלעס) אונ, צװײטנס, װיַאזױ, געפֿינענדיק אזא לאָגאריפֿמ, אױפֿצוזוכנ לױט אים אינ די טאבעלעס די געזוכטע צאָל.

106. לאָגאריפמ פונ א קייפל־פּראָדוקט, א טיילוועדט, א מאדרייגע אונ א וואָרצל.

א) זאָל זיכ פאָדערנ צו מאכנ דעמ קייפל:

$$378 \cdot 45{,}2.$$

לאָמיר פרווּונ דורכמאכנ דעמ דאָזיקנ אקט דורכ לאָגאריפמענ. לאָמיר געפינענ אינ די טאבעלעס די לאָגאריפמענ פונ די צאָלנ 378 אונ 45,2. זאָלנ זיי זײַנ: 2,5775 אונ 1,6551 (לויטנ באזיס 10). דאָס באטײַט, אז:

$$378 = 10^{2{,}5775}$$

אונ

$$45{,}2 = 10^{1{,}6551},$$

אונ דעריבער איז

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775} \cdot 10^{1{,}6551}.$$

אזויווי באמ קייפלענ מאדרייגעס פונ איינער אונ דער זעלביקער צאָל ווערנ די ווײַזערס פונ די דאָזיקע מאדרייגעס צונויפגעלייגט (וואָסערע עס זאָלנ ניט זײַנ די ווײַזערס), איז

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775 + 1{,}6551} = 10^{4{,}2326}.$$

הייסט עס, אז דער לאָגאריפמ פונעמ קייפל־פּראָדוקט 378.45,2 איז די צאָל 4,2326, וועלכע האָט זיכ באקומענ פונ צונויפלייגנ די לאָגאריפמענ פונ די געגעבענע מיטקייפלערס (לויט דעמ דאָזיקנ לאָגאריפמ וועלנ מיר אינ די טאבעלעס געפינענ אויכ דעמ קייפל־פּראָדוקט גופא).

לאָמיר אָננעמענ ביכלאל, אז N_1 אונ N_2 וועלנ זײַנ צוויי צאָלנ, וואָס זייער קייפל־פּראָדוקט פאָדערט זיכ אויסצורעכענענ. זאָל זײַנ, אז מיר האָבנ געפונענ אינ די טאבעלעס די לאָגאריפמענ פונ די דאָזיקע צאָלנ x_1 אונ x_2. דער באזיס פונ די דאָזיקע לאָגאריפמענ קאָנ זײַנ די צאָל 10, נאָר עס קאָנ זײַנ אויכ א וואָסערע עס איז אנדער צאָל, וועלכע מיר וועלנ באצייכענענ מיט a. דעמלט וועלנ מיר האָבנ די גלײַכקײַטנ:

$$N_1 = a^{x_1}, \ N_2 = a^{x_2};$$

דעריבער איז:

$$N_1 N_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

פונדאנענ איז צו זענ, אז

$$\log \ (N_1 N_2) = x_1 + x_2 \cdot$$

אָבער x_1—דאָס איז $\log N_1$, אונ x_2—דאָס איז $\log N_2$; הייסט עס, אז:

$$\log \ (N_1 N_2) = \log N_1 + \log N_2 \cdot$$

דער לאָגאריפמ פונ א קייפל־פּראָדוקט (בא וואָסערנ מע וויל באזיס) איז גלײַכ צו דער סומע לאָגאריפמענ פונ מיטקייפלערס (גענומענע לויט דעמ זעלביקנ באזיס).

דער דאָזיקער אויספיר פארבלייבט א ריכטיקער אויכ דעמלט, ווענ מיטקייפלערס וועט זײַנ מער פונ צוויי, ווײַל באם קייפלענ מאדרייגעס פונ איינער אונ דער זעל־ביקער צאָל לייגט מענ צונויפ זייערע מאדרייגע־ווײַזערס אויכ דעמלט, ווענ די דאָזיקע מאדרייגעס וועלנ זײַנ מער פונ צוויי.

ב) לאָמיר אָננעמענ, אז מע דארפ מאכנ א כילעק:

$$5637 : 26{,}3.$$

לאָמיר געפינענ אינ די טאבעלעס די לאָגאריפמענ פונ די דאָזיקע צאָלנ (צום בײַשפּיל, בא דעם באזיס 10). זאָל זײַנ, אז $\log 5637 = 3{,}751$ אונ $\log 2{,}63 = 1{,}42$. דעמלט איז:

$$5637 = 10^{3{,}751}$$

אונ

$$26{,}3 = 10^{1{,}42}.$$

הייסט עס, אז

$$5637 : 26{,}3 = 10^{3{,}751} : 10^{1{,}42} = 10^{3{,}751 - 1{,}42} = 10^{2{,}331},$$

פונדאנענ איז צו זענ, אז דער לאָגאריפמ פונעמ טיילווערט $5637 : 26{,}3$ איז די צאָל $2{,}331$, וואָס האָט זיכ באקומענ פונ אראָפּנעמענ דעמ לאָגאריפמ פונעמ טיילער פונעמ לאָגאריפמ פונ דער כילעקצאָל. אינ אלגעמיינ, אויב

$$N_1 = a^{x_1};\ N_2 = a^{x_2},$$

איז:

$$N_1 : N_2 = a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}.$$

דעריבער איז:

$$\log (N_1 : N_2) = x_1 - x_2 = \log N_1 - \log N_2.$$

<u>דער לאָגאריפמ פונעמ טיילווערט איז גלײַכ צו דעמ לאָגאריפמ פונ דער כילעק־צאָל אָנ דעמ לאָגאריפמ פונעמ טיילער.</u>

אזויווי יעדער ברוכצאָל איז דער טיילווערט, וואָס באקומט זיכ פונ טיילנ דעמ ציילער אפנ דײַטער, איז

<u>דער לאָגאריפמ פונ א ברוכצאָל גלײַכ צומ לאָגאריפמ פונעמ ציילער אָנ דעמ לאָ־גאריפמ פונעמ דײַטער.</u>

צום בײַשפּיל:

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3;\ \log 2\frac{3}{4} = \log \frac{11}{4} = \log 11 - \log 4;$$

$$\log 0{,}6 = \log 6 - \log 10.$$

ג) אויב $N = a^x$, איז

$$N^n = (a^x)^n = a^{nx};$$

דעריבער איז

$$\log (N^n) = nx = n \log N.$$

דער לאָגאריפמ פונ א מאדרייגע איז גלייכ צו דעמ וויַזער פונ דער דאָזיקער מאדרייגע, געקייפלט אפנ לאָגאריפמ פונ דער צאָל, וועלכע ווערט דערהייבנ.

צומ בײַשפיל,

$$\log (15{,}3)^2 = 2 \log 15{,}3; \quad \log 3^{-2} = -2 \log 3.$$

ד) אזוי ווי $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$, איז באמ אָנווענדנ דעמ קלאל וועגנ לאָגאריפמ פונ א מאדרייגע באקומענ מיר:

$$\log \sqrt[n]{N} = \log N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log N = \frac{\log N}{n}.$$

דער לאָגאריפמ פונ א וואָרצל איז גלייכ צומ לאָגאריפמ פונ דער אונטערארדיקער צאָל, געטיילט אפנ וואָרצל־וויַזער.

107. לאָגאריפמירונג פונ אנ אלגעבראישנ אויסדרוק. לאָגאריפמירנ אנ אלגעבראישנ אויסדרוק באטײַט: אויסדריקנ זײַנ לאָגאריפמ דורכ לאָגאריפמענ פונ איינצלנע צאָלנ, וועלכע שטעלנ צונויפ דעמ דאָזיקנ אויסדרוק. די אויספירנ פונעמ פאָריקנ פאראגראפ דערלויבנ דאָס צו טאָנ באמ אָנווענדנ דאָס צו א קייפל־פראָדוקט, צו א טיילוועט, צו א מאדרייגע אונ צו א ברוכצאָל. צומ בײַשפיל:

$$1)\ \log \frac{2{,}5 \cdot 7^3}{0{,}28} = \log (2{,}5 \cdot 7^3) - \log 0{,}28 = \log 2{,}5 + \log 7^3 - \log 0{,}28 =$$
$$= \log 2{,}5 + 3 \log 7 - \log 0{,}28.$$

$$2)\ \log \frac{5ax}{\sqrt{3}} = \log (5ax) - \log \sqrt{3} = \log 5 + \log a + \log x - \frac{1}{2} \log 3.$$

$$3)\ \log (a^3 \sqrt{5x}) = 3 \log a + \frac{1}{2} (\log 5 + \log x) = 3 \log a +$$
$$+ \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log x.$$

108. באמערקונגענ. א) אויב אינעמ אויסדרוק, וועלכנ עס פאָדערט זיכ אויסצורעכענענ, באגעגנט זיכ א סומע אָדער א דיפערענצ פונ צאָלנ, דארפ מענ זיי געפינענ אָנ דער הילפ פונ די טאבעלעס, דורכ פאָשעטנ כיבער אָדער כיסער [1].

צומ בײַשפיל:

$$\log (35 + 7{,}24)^5 = 5 \log (35 + 7{,}24) = 5 \log 42{,}24.$$

---

[1] ווײַל מיר האָבנ ניט קיינ פאָרמולעס, וואָס זאָלנ אויסדריקנ דעמ לאָגאריפמ פונ דער סומע אָדער פונ דער דיפערענצ אָפהענגיק פונ די לאָגאריפמענ פונ די געגעבענע צאָלנ.

ב) אז מיר קאָנען לאָגאַריפמירן אויסדרוקן, קאָנען מיר, פאַרקערט, לויטן געגע־בענעם רעזולטאַט פון דער לאָגאַריפמירונג געפינען יענעם אויסדרוק, פון וועלכן עס האָט זיך באַקומען דער דאָזיקער רעזולטאַט; אַשטייגער, אויב

$$\log x = \log a + \log b - 3 \log c,$$

איז אויך גרינג צו באַנעמען, אַז

$$x = \frac{ab}{c^3}.$$

די דאָזיקע אָפּעראַציע רופט זיך פּאָטענצירונג.

ג) איידער מיר וועלן אַריבערגיין צום באַטראַכטן דעם געבוי פון די לאָגאַריפ־מישע טאַבעלעס, וועלן מיר אָנווייזן אייניקע אייגנשאַפטן פון דעצימאַלע לאָ־גאַריפמען, ד. ה. פון אַזוינע, אין וועלכע עס איז אָנגענומען געוואָרן פאַר אַ באַזיס די צאָל 10 (בלויז אַזוינע לאָגאַריפמען נוצט מען אין אויסרעכענונגען).

געניטונגען:

לאָגאַריפמירט פאָלגנדיקע אויסדרוקן:

181. $\log (a^2b^3)$; $\log (5a^3x^2)$; $\log (mn)^3$.

182. $\log \frac{2a^2}{3b^3}$; $\log \frac{4a^3b^{-8}}{5mn^4 x^{-\frac{1}{2}}}$; $\log \sqrt{ab}$.

183. $\log \sqrt[3]{7a^3b}$; $\log\left(4\sqrt[5]{2ab^3}\right)$; $\log\left(7a^3b\sqrt[8]{c}\right)$.

184. $\log \frac{a^2\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$; $\log (a^2 - b^2)$; $\log (a - b^2)$.

185. $\log \sqrt{10a \sqrt[3]{b^2}}$; $\log \sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$

געפינט דעם אויסדרוק x, אויב זיין לאָגאַריפם איז גלייך צו:

186. $\log x = \log a + \log b$; $\log x = \log a - \log b$.

187. $\log x = 2 \log a$; $\log x = 2 \log a + 3 \log b$.

188. $\log x = \frac{1}{2} \log a$; $\log x = \frac{1}{3} (\log a + \log b)$.

II. אייגנשאַפטן פון דעצימאַלע לאָגאַריפמען.

109. א) אַזוי ווי $10^1=10$; $10^2=100$; $10^3=1000$; $10^4=10\,000$ א. א. וו., איז $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 1000 = 3$; $\lg 10000 = 4$ א.א.וו.

דער לאָגאַריפם פון אַ גאַנצער צאָל, וואָס איז באַצייכנט דורך אַן איינס מיט נולן, איז אַ גאַנצע פּאָזיטיווע צאָל, וואָס אַנטהאַלט אַזויפיל איינסן, וויפל עס איז פאַראַן נולן אין דער באַצייכנטער צאָל.

אַף אַזאַ אופן איז $\lg 100\,000 = 5$, $\lg 1\,000\,000 = 6$ א.א.וו.

ב) אזוי ווי

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}01;\ 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0{,}01;$$

$$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0{,}001;\quad 10^{-4}=0{,}0001$$ א.א.וו.

איז

$$\lg 0{,}1=-1;\quad \lg 0{,}01=-2;\quad \lg 0{,}001=-3$$ א.א.וו.

דער לאָגאריפמ פונ א דעצימאלער ברוכצאָל, וועלכע איז באצייכנט דורכ אנ איינס מיט נולנ פונ פריִער, איז א גאנצע נעגאטיווע צאָל, וואָס אנטהאלט אזויפיל נעגאטיווע איינסנ, וויפל עס איז פאראנ נולנ אינ דער באצייכנטער ברוכצאָל, ארייַנגערעכנט אינ דער דאָזיקער צאָל אויכ די 0 גאנצע.

אפ אזא אופנ איז:

$$\lg 0{,}00001=-5;\quad \lg 0{,}000001=-6$$ א.א.וו.

ג) לאָמיר נעמענ א גאנצע צאָל, וואָס איז ניט באצייכנט דורכ אנ איינס מיט נולנ, צומ בייַשפיל 35, אָדער א גאנצע צאָל מיט א ברוכצאָל, צומ בייַשפיל 10,7. דער לאָגאריפמ פונ אזא צאָל קאָנ ניט זייַנ קיינ גאנצע צאָל, ווייַל, אז מיר זאָלנ דערהייבנ 10 אינ א מאדרייגע מיט א גאנצנ מאדרייגע-ווייַזער (א פּאָזיטיוונ אָדער א נעגאטיוונ), וועלנ מיר באקומענ 1 מיט נולנ (וואָס גייענ נאָכנ איינס אָדער וואָס גייענ פאר אימ). לאָמיר אָנעמענ איצטער, אז דער לאָגאריפמ פונ אזא צאָל איז א וואָסערע ניט איז ברוכצאָל $\frac{a}{b}$. דעמלט וואָלטנ מיר געהאט די גלייַכקייַטנ:

פאר דער צאָל 35:

$$10^{\frac{a}{b}}=35;\quad \sqrt[b]{10^a}=35;\quad 10^a=35^b;$$

פאר דער צאָל 10,7:

$$10^{\frac{a}{b}}=10{,}7;\quad \sqrt[b]{10^a}=10{,}7;\quad 10^a=10{,}7^b.$$

אָבער די דאָזיקע גלייַכקייַטנ זייַנענ אוממעגלעכ, ווייַל 10^a איז 1 מיט נולנ, בייס די מאדרייגעס 35^b אונ $10{,}7^b$ קאָנענ בא קיינשומ מאדרייגע-ווייַזער b ניט געבנ קיינ 1 מיט נולנ. הייסט עס, אז דער לאָגאריפמ פונ אזא צאָל איז אנ איראַ־ציאָנעלע צאָל, אונ דעריבער קאָנ ער ניט אויסגעדריקט ווערנ פינקטלעכ דורכ א וואָסערער עס זאָל ניט זייַנ ראציאָנעלער צאָל. געוויינלעכ דריקט מענ אויס איראציאָנעלע לאָגאריפמענ אומגעפער אינ דער פאָרמ פונ א דעצימאלער ברוכצאָל מיט עטלעכע דעצימאלע צייכנס. די גאנצע צאָל פונ דער דאָזיקער, ברוכצאָל (זאָל דאָס כאָטש זייַנ „0 גאנצע") רופט זיכ די כאראקטעריסטיק אונ דער ברוכצאָליקער טייל—די מאנטיסע פונעמ לאָגאריפמ. אויב, צומ בייַשפיל, דער לאָגאריפמ איז 1,5441, איז זייַנ כאראקטעריסטיק גלייַכ צו 1, אונ די מאנטיסע איז 0,5441.

ד) לאָמיר נעמען א וואָסער ניט איז גאנצע אָדער געמישטע צאָל, צום בײַשפּיל 623 אָדער 623,57. דער לאָגאריפם פון אזא צאָל באשטייט פון א כאראקטעריסטיק און א מאנטיסע. ווײַזט זיך ארויס, אז דעצימאלע לאָגאריפמען פארמאָגן יענע באקוועמלעכקײַט, וואָס זייער כאראקטעריסטיק קאָנען מיר שטענדיק געפינען לויט דעם עצעם אויסזען פון דער צאָל. צוליב דעם לאָמיר איבערציילן, וויפל ציפער איז אין דער געגעבענער צאָל אָדער אינעם גאנצן טייל פון דער געמישטער צאָל. אין אונדזערע בײַשפּילן איז אזוינע ציפער פאראן דרײַ. דעריבער איז יעדערע פון די צאָלן 623 און 623,57 גרעסער פון 100, אָבער קלענער פון 1000; הייסט עס, אז דער לאָגאריפם בא יעדערער פון זיי איז גרעסער פון lg 100, ד. ה. פון צוויי, אָבער קלענער פון lg 1000, ד. ה. פון דרײַ (לאָמיר זיך דערמאָנען, אז א גרעסערע צאָל האָט אויך א גרעסערן לאָגאריפם).

הייסט עס, אז

$$\lg 623 = 2\ldots$$

און

$$\lg 623{,}57 = 2\ldots$$

(די פונקטן פארבײַטן די אומבאוווסטע מאנטיסעס).

פונקט אזוי וועלן מיר געפינען:

$$10 < 56{,}7 < 100; \qquad 1000 < 8634 < 10000;$$
$$1 < \lg 56{,}7 < 2; \qquad 3 < \lg 8634 < 4.$$

הייסט עס, אז

$$\lg 56{,}7 = 1\ldots; \qquad \lg 8634 = 3\ldots.$$

זאָל ביכלאל אין דער געגעבענער גאנצער צאָל אָדער אינעם גאנצן טייל פון דער געגעבענער געמישטער צאָל זיך אנטהאלטן m ציפער. אזוי ווי די סאמע קלענסטע גאנצע צאָל, וואָס פארמאָגט m ציפער, איז 1 מיט $m-1$ נולן אפּן סאָף, קאָנען מיר (באצייכענענדיק די געגעבענע צאָל דורך N) אָנשרײַבן די אומגלײַכקײַטן:

$$\overbrace{1000\ldots0}^{m-1\ \text{נולן}} < N < \overbrace{1000\ldots0}^{m\ \text{נולן}},$$

און דעריבער איז

$$m-1 < \lg N < m,$$

און אזוי ארום איז

$$\lg N = (m-1) + \text{פּאָזיטיווע ברוכצאָל}$$

הייסט עס, אז די כאראקטעריסטיק פון $\lg N$ איז גלײַך צו $m-1$.

מיר זעען אפּ אזא אופן, אז:

די כאראקטעריסטיק פונעם לאָגאריפם בא א גאנצער אָדער געמישטער צאָל אנטהאלט אזויפיל פּאָזיטיווע איינסן, וויפל ציפער עס איז אינעם גאנצן טייל פון דער צאָל אָן איינער.

וויבאלד מיר האָבנ דאָס באמערקט, קאָנענ מיר גלײַכ שרײַבנ:

$$\lg 7{,}205 = 0\ldots;\ \lg 83 = 1\ldots;\ \lg 720{,}4 = 2\ldots$$ א.א.וו.

ה) לאָמיר נעמענ עטלעכע דעצימאלע ברוכצאָלנ, קלענערע פונ 1 (ד. ה., וואָס האָבנ 0 גאנצע):

$$0{,}35;\ 0{,}07;\ 0{,}0056;\ 0{,}0008$$

א.ד.ג.

ס'איז דײַטלעך, אז	דעריבער איז
$0{,}1 < 0{,}35 < 1;$	$-1 < \lg 0{,}35 < 0;$
$0{,}01 < 0{,}07 < 0{,}1;$	$-2 < \lg 0{,}07 < -1;$
$0{,}001 < 0{,}0056 < 0{,}01;$	$-3 < \lg 0{,}0056 < -2;$
$0{,}0001 < 0{,}0008 < 0{,}001;$	$-4 < \lg 0{,}0008 < -3.$

אפ אזא אופנ איז יעדערער פונ די דאָזיקע לאָגאריפמענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ צוויי גאנצע נעגאטיווע צאָלנ, וואָס שיידנ זיכ אונטער אפ איינ איינס; דעריבער איז יעדערער פונ זיי גלײַכ צו דער קלענערער פונ די דאָזיקע נעגאטיווע צאָלנ, פארגרעסערט אפ א געוויסער פּאָזיטיווער ברוכצאָל. צומ בײַשפּיל:

$\lg 0{,}0056 = -3 +$ פּאָזיטיווע ברוכצאָל

לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ, אז די דאָזיקע ברוכצאָל וועט זײַנ $0{,}7482$.

דעמלט, הייסט עס, איז:

$$\lg 0{,}0056 = -3 + 0{,}7482\ (= -2{,}2518).$$

אזוינע סומעס, ווי $-3 + 0{,}7482$, וואָס באשטייענ פונ א גאנצער נעגאטיווער צאָל אונ א פּאָזיטיווער דעצימאלער ברוכצאָל, האָט מענ אָפּגערעדט בא לאָגאריפמישע אויסרעכענונגענ צו שרײַבנ פארקירצט אזוי: $\bar{3},7482$[1], ד. ה. שטעלנ דעמ צייכנ מינוס איבער דער כאראקטעריסטיק מיטנ ציל צו באווײַזנ, אז ער איז שײַעכ בלויז צו דער דאָזיקער כאראקטעריסטיק, אָבער ניט צו דער מאנטיסע, וועלכע בלײַבט א פּאָזיטיווע. אפ אזא אופנ איז פונ דער פריִער געבראכטער טאבעלקע קאָנטיק, אז:

$$\lg 0{,}35 = \bar{1},\ldots;\ \lg 0{,}07 = \bar{2},\ldots;\ \lg 0{,}0008 = \bar{4},\ldots$$

זאָל ביכלאל $A = \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ נולנ}}\alpha\beta\ldots$ זײַנ א דעצימאלע ברוכצאָל, וואָס פאר איר ערשטער באדײַטיקער ציפער α שטייט m נולנ, ארײַנגערעכנט אינ דער צאָל אויכ 0 גאנצע.

דעמלט איז קלאָר, אז:

$$\overbrace{0{,}000\ldots01}^{m \text{ נולנ}} < A < \overbrace{0{,}000\ldots01\ldots}^{m-1 \text{ נולנ}}\,.$$

דעריבער איז

$$\overbrace{\lg 0{,}000\ldots01}^{m \text{ נולנ}} < \lg A < \overbrace{\lg 0{,}000\ldots01}^{m-1 \text{ נולנ}}\,,$$

ד. ה.

$$-m < \lg A < -(m-1).$$

---

1) אזא צאָל לייענט זיכ אזוי: 3 מיט א מינוס 7482 צענטויזנטלעכ.

אזוי פון צוויי גאנצע צאָלן: $m-$ און $(m-1)-$ איז די קלענערע $m-$, איז

$$\lg A = -m + \text{פּאָזיטיווע ברוכצאָל}$$

און דעריבער איז די כאַראַקטעריסטיק פון $\lg A$ גלײַך צו m (בײַ אַ פּאָזיטיווער מאַנטיסע).

די כאַראַקטעריסטיק פונעם לאָגאַריפם פון אַ דעצימאַלער ברוכצאָל, וועלכע איז קלענער פון 1, אַנטהאַלט אין זיך אַזויפיל נעגאַטיווע איינסן, וויפל נולן עס איז אין דער פאַרשריבענער דעצימאַלער ברוכצאָל פאַר דער ערשטער באַדײַטיקער ציפער, אַרײַנגערעכנט אין דער דאָזיקער צאָל אויך נול גאַנצע; די מאַנטיסע אָבער אין אַזאַ לאָגאַריפם איז אַ פּאָזיטיווע.

ו) לאָמיר קייפלען אַ וואָסערע ניט איז צאָל N (אַ גאַנצע, צי אַ ברוכצאָליקע— אַלצײַנס) אויף 10, אויף 100, אויף 1000..., בכלל אויף אַן איינס מיט נולן. לאָמיר אַ קוק טאָן, ווי וועט זיך פון דעם ענדערן $\lg N$. אַזוי ווי דער לאָגאַריפם פון אַ קייפל־פּראָדוקט איז גלײַך צו דער סומע לאָגאַריפמען פון די מיטקייפלערס, איז:

$$\lg (N\cdot 10) = \lg N + \lg 10 = \lg N + 1\,;$$

$$\lg (N\cdot 100) = \lg N + \lg 100 = \lg N + 2\,;$$

$$\lg (N\cdot 1000) = \lg N + \lg 1000 = \lg N + 3$$

א. א. ו.

ווען מיר גיבן צו צום $\lg N$ אַ וואָסערע ניט איז גאַנצע צאָל, פאַרגרעסערט די דאָזיקע צאָל בלויז די כאַראַקטעריסטיק, אָבער ניט די מאַנטיסע. אַשטייגער, אויב $\lg N = 2{,}7804$, איז $2{,}7804 + 1 = 3{,}7804$; $2{,}7804 + 2 = 4{,}7804$ א.ד.ג. אָדער אויב $\lg N = \bar{3}{,}5649$, איז $\bar{3}{,}5649 + 1 = \bar{2}{,}5649$; $\bar{3}{,}5649 + 2 = \bar{1}{,}5649$ א.ד.ג. דעריבער איז:

פון קייפלען אַ צאָל אויף 10, 100, 1000..., בכלל אויף אַן איינס מיט נולן, בײַט זיך ניט די פּאָזיטיווע מאַנטיסע פונעם לאָגאַריפם, און די כאַראַקטעריסטיק פאַרגרעסערט זיך אויף אַזויפיל איינסן, וויפל נולן עס איז פאַראַן אינעם קייפלער.

ווען מע זאָל נעמען אין באַטראַכט, אַז דער לאָגאַריפם פונעם טיילווערט איז גלײַך צו דעם לאָגאַריפם פון דער טיילעקצאָל אָן דעם לאָגאַריפם פונעם טיילער, וועלן מיר באַקומען:

$$\lg \frac{N}{10} = \lg N - \lg 10 = \lg N - 1\,;$$

$$\lg \frac{N}{100} = \lg N - \lg 100 = \lg N - 2\,;$$

$$\lg \frac{N}{1000} = \lg N - \lg 1000 = \lg N - 3$$

א. ד. ג.

אויב מיר וועלנ אָפריידנ באַם אַראָפּנעמענ א גאַנצע צאָל פונעם לאָגאַריפם אַראָפּצונעמענ די דאָזיקע גאַנצע צאָל שטענדיק פונ דער כאַראַקטעריסטיק, אונ די מאַנטיסע לאָזנ אָנ ענדערונג, קאָנ מענ זאָגנ, אַז:

פונ טײלנ א צאָל אָפּ אַנ אײנס מיט נולנ בײַט זיכ ניט די פּאָזיטיװע מאַנטיסע פונעם לאָגאַריפם, אונ די כאַראַקטעריסטיק פאַרקלענערט זיכ אָפּ אַזויפיל אײנסנ, װיפל נולנ עס איז פאַראַנ אינעם טײלער.

110. אויספירנ. א) **די מאַנטיסע באַ א לאָגאַריפם פונ א דעצימאַלער ברוכצאָל ענדערט זיכ ניט פונ איבערטראָגנ אינ דער צאָל די קאָמע**, װײַל איבערטראָגנ די קאָמע איז אַלצײנס װי קײפלענ אָדער טײלנ אָפּ 10, 100, 1000 א.א.װ. אָפּ אַזאַ אויפנ קומט אויס, אַז די לאָגאַריפמענ פונ די צאָלנ:

0,00423; 0,0423; 4,23; 423

שײדנ זיכ אונטער בלויז מיט די כאַראַקטעריסטיקעס, נאָר ניט מיט די מאַנטיסעס (באַמ באַדינג, אַז אַלע מאַנטיסעס זײַנענ פּאָזיטיװע).

ב) **מאַנטיסעס פונ צאָלנ, װאָס האָבנ אײנעם אונ דעם זעלביקנ באַדײַטיקנ טײל, נאָר װאָס שײדנ זיכ אונטער בלויז מיט די נולנ אָפּנ סאָפ, זײַנענ אַלצײנע.** אַשטײגער, די לאָגאַריפמענ פונ די צאָלנ: 23; 230; 2300; 23000 שײדנ זיכ אונטער בלויז מיט די כאַראַקטעריסטיקעס.

באַמערקונג. פונ די אָנגעװיזענע אײגנשאַפטנ פונ דעצימאַלע לאָגאַריפמענ איז קאָנטיק, אַז די כאַראַקטעריסטיק פונעם לאָגאַריפם פונ א גאַנצער צאָל אונ א דעצימאַלער ברוכצאָל קאָנענ מיר געפינענ אָנ דער הילפ פונ טאַבעלעס (אינ דעם באַשטײט די גרויסע באַקװעמלעכקײַט פונ די דעצימאַלע לאָגאַריפמענ); דעריבער װערנ אַרײַנגעשטעלט אינ די לאָגאַריפמישע טאַבעלעס בלויז אײנע מאַנטיסעס; כוץ דעמ, אַזױװי געפינענ די לאָגאַריפמענ פונ ברוכצאָלנ לאָזט זיכ אויס צו געפינענ די לאָגאַריפמענ פונ גאַנצע צאָלנ (דער לאָגאַריפם פונ א ברוכצאָל איז גלײַכ צומ לאָגאַריפם פונעם צײלער אָנ דעם לאָגאַריפם פונעם דײַטער), געפינענ זיכ אינ די טאַבעלעס די מאַנטיסעס פונ לאָגאַריפמענ בלויז פונ גאַנצע צאָלנ.

געניטונגענ.

189. געפינט די כאַראַקטעריסטיקעס פונ די לאָגאַריפמענ באַ פאָלגנדיקע צאָלנ:

$$3;\ 38;\ 382;\ 3824;\ 3{,}12;\ 37{,}2;\ 56315{,}726;\ 57\frac{1}{2};\ 3485\frac{2}{7}.$$

190. צו װאָס זײַנענ גלײַכ די דעצימאַלע לאָגאַריפמענ פונ פאָלגנדיקע ברוכצאָלנ:

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}00001;\ 0{,}0000001?$$

191. געפינט די כאַראַקטעריסטיקעס פונ די דעצימאַלע לאָגאַריפמענ פונ פאָלגנדיקע ברוכצאָלנ:

$$0{,}36;\ 0{,}183;\ 0{,}02;\ 0{,}0036;\ 8{,}00056;\ 0{,}00000378.$$

192. עס איז געגעבנ: $\lg 2 = 0{,}301$; $\lg 3 = 0{,}477$; $\lg 7 = 0{,}845$. װיסנדיק דאָס, רעכנט אויס דעצימאַלע לאָגאַריפמענ פאַר די ערשטע 10 נאַטורעלע צאָלנ.

193. לויט די געגעבענע $\lg 2 = 0{,}30103$ אונ $\lg 3 = 0{,}47712$ רעכנט אויס $\lg 0{,}0015$ אונ $\lg 5750$.

194. װיפל ציפער איז אינ דער צאָל 2^{100}, אויב $\lg_{10} 2 = 0{,}30103$?

III. געבוי און באנוץ פונ די טאבעלעס.

111. לאָגאריפמענ־סיסטעמ. לאָגאריפמענ־סיסטעמ רופט זיכ א זאמלונג לאָגאריפמענ, אויסגערעכנטע פאר א ריי נאָכאנאנדיקע גאנצע צאָלנ לויט איינעמ און דעמ זעלביקנ באזיס. מע נוצט צוויי סיסטעמעס: א סיסטעמ פונ פּאָשעטע, אָדער דעצימאלע, לאָגאריפמענ, וואָס בא זיי איז פאר א באזיס גענומענ געוואָרנ די צאָל 10, אונ א סיסטעמ אזוי גערופענע נאטורעלע לאָגאריפמענ, וואָס בא זיי א״ז פאר א באזיס (צוליב געוויסע סיבעס, וואָס ווערנ דערקלערט אינ אנדערע אָפּטיילנ פונ מאטעמאטיק) גענומענ געוואָרנ די איראציאָנעלע צאָל... 2,7182818. אפ אויסרעכענונגענ נוצט מענ דעצימאלע לאָגאריפמענ איבער יענע באקוועמלעכקײטנ, וועלכע מיר האָבנ אָנגעוויזנ, ווענ מיר האָבנ אויסגערעכנט די אייגנשאפטנ פונ אזוינע לאָגאריפמענ.

נאטורעלע לאָגאריפמענ רופנ זיכ אויכ נעפּערישע, אפנ נאָמענ פונעמ דערפינדער פונ די לאָגאריפטענ, דעמ שאָטלענדישנ מאטעמאטיקער נעפּער (1550—1617), אונ די דעצימאלע לאָגאריפמענ—בריגישע, אפנ נאָמענ פונעמ פּראָפעסער ברי (נעפּערס א פרײַנט אונ א צײַט־כאווער), וועלכער האָט דער ערשטער צונויפגעשטעלט די טאבעלעס פונ די דאָזיקע לאָגאריפמענ[1].

112. אומבילדונג פונ א נעגאָטיוונ לאָגאריפמ. מיר האָבנ געזענ, אז לאָגאריפמענ פונ צאָלנ, וואָס זײַנענ קלענער פונ 1, זײַנענ נעגאטיוו. הייסט עס, אז זיי באשטייענ פונ א נעגאטיווער כאראקטעריסטיק אונ א נעגאטיווער מאנטיסע. אזוינע לאָגאריפמענ קאָנ מענ שטענדיק אומבילדנ אזוי, אז בא זיי וועט די מאנטיסע זײַנ א פּאָזיטיווע אונ די כאראקטעריסטיק וועט פארבלײַבנ א נעגאטיווע. צוליב דעמ איז גענוג צוצוגעבנ צו דער מאנטיסע א פּאָזיטיוונ איינס אונ צו דער כאראקטעריסטיק—א נעגאטיוונ (פונ דעמ וועט, פארשטייט זיכ, די גרייס פונעמ לאָגאריפמ ניט ענדערנ זיכ). אויב מיר האָבנ, צומ בײַשפּיל, דעמ לאָגאריפמ 2,0873,—קאָנ מענ אימ אומבילדנ אזוי:

$$-2,0873 = -2 - 1 + 1 - 0,0873 = -(2+1) + (1 - 0,0873) =$$
$$= -3 + 0,9127,$$

אָדער פארקירצט:

$$\overset{-1+1}{-2,0873} = -2,0873 = \overline{3},9127.$$

[1]) מע דארפ פונדעסטוועגנ באמערקנ, אז די נעפּערישע לאָגאריפמענ זײַנענ ניט אידענטיש מיט די נאטורעלע, נאָר זיי זײַנענ בלויז צוגעבונדנ מיט זיי דורכ א געוויסער פארהעלטעניש. צומ ערשטנ מאָל האָט די נאטורעלע לאָגאריפמענ ארײַנגעפירט נאָכ נעפּערס טויט, אינ 1619 י., דער לערער פונ מאטעמאטיק אינ לאָנדאָנ דזשאָנ ספּיידל. אינ דעמ פאָלגנדיקנ 1620 יאָר האָט דער שווייצער בירגי פובליקירט זײַנע טאבעלעס, וואָס ער האָט צונויפגעשטעלט אומאָפּהענגיק פונ נעפּערנ.

מיר וועלנ צוגעבנ, אז אינ 1914 י. (אינ יאָר, ווענ ס׳איז אנטשטאנענ די וועלט־מילכאָמע) איז געוואָרנ דרײַהונדערט יאָר, זינט מע האָט דערפונדנ די לאָגאריפמענ, ווײַל נעפּער האָט פובליקירט זײַנע טאבעלעס אינ 1614 יאָר אונטערנ נאָמענ (״Mirifici logarithmorum canonis descriptio״).

פארקערט, יעדער לאָגאריפם מיט א נעגאטיווער כאראקטעריסטיק און א פּאָזי־טיווער מאנטיסע קאָן מען פארוואנדלען אין א נעגאטיוון. צוליב דעם איז גענוג צו דער פּאָזיטיווער מאנטיסע צולייגן א נעגאטיוון איינס, און צו דער נעגאטיווער כאראק־טעריסטיק—א פּאָזיטיוון [1]); אזוי ארום קאָן מען אָנשרייבן:

$$+1\ -1$$

$$7{,}8302 = \bar{7}{,}8302 = -6{,}1698.$$

113. באשרייבונג פון פירציפערדיקע טאבעלעס און דאָס באנוצן זיך מיט זיי. קעדיי צו לייזן די מערהייט פּראקטישע אופגאבעס, זיינען פולשטענ־דיק גענוג די פירציפערדיקע טאבעלעס, וואָס דאָס באגיין זיך מיט זיי איז זייער פּאָשעט [2]). א קליינער טייל זייערער (קעדיי צו דערקלערן זייער פאנאנדערשטעלונג) איז אָפּגעדרוקט אף דער דאָזיקער זייט. אין זיי געפינען זיך די מאנטיסעס פון די לאָגאריפמען פון אלע גאנצע צאָלן פון 1 ביז 9999 איינגעשלאָסן, אויסגערעכנט מיט פיר געצענטלטע צייכנס, דערביי איז דער לעצטער פון די דאָזיקע צייכנס פאר־גרעסערט אף 1 אין אלע יענע פאלן, ווען דער 5-טער געצענטלטער צייכן האָט געדארפט זיין 5 אָדער מער פון 5, אף אזא אויפן גיבן די פירציפערדיקע טאבע־לעס אומגעפערע מאנטיסעס מיט דער פינקטלעכקייט ביז $\frac{1}{2}$ פון א צענטויזנטכיילעק (מיט א מאנגל אָדער מיט אן איבערפלוס).

לאָגאריפמען.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*123*	*456*	*789*
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	*123*	*345*	*789*
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	*123*	*345*	*678*
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	*122*	*345*	*677*
53	7243	7251	7259	7267	7267	7284	7275	7300	7308	7316	*122*	*345*	*667*
54	7324	7332	7340	7348	7348	7364	7356	7380	7388	7396	*122*	*345*	*667*
55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

[1]) קעדיי אויספילן די דאָזיקע אומבילדונגען קומט אויס צוצוגעבן 1+ און 1—, איינע פון די דאָזיקע צאָלן צו דער כאראקטעריסטיק, און די צווייטע צו דער מאנטיסע. קעדיי ניט האָבן קיין טעות, צו וואָס צוצוגעבן 1+ און צו וואָס 1—, איז נוציק אלעמאָל לייגן אכט אף דער מאנטיסע פונעם פארגעבענעם לאָגאריפם און באטראכטן די זאך אזוי: זאָל זיין אין דעם פארגעבענעם לאָגאריפם די מאנטיסע נעגאטיוו, און מע דארף זי מאכן פּאָזיטיוו; דעמלט דארף מען, פארשטייט זיך, צו איר צוגעבן 1+, און דעריבער דארף מען צו דער כאראקטעריסטיק צוגעבן 1—; זאָל זיין אין דעם פאר־געבענעם לאָגאריפם די מאנטיסע פּאָזיטיוו, און מע דארף זי מאכן נעגאטיוו (דער גאנצער לאָגאריפם דארף זיין נעגאטיוו); דעמלט דארף מען צו איר צוגעבן 1—, און, הייסט עס, צו דער כאראק־טעריסטיק 1+.

[2]) אין פאלן, וואָס פאָדערן א גרעסערע פינקטלעכקייט, באנוצט מען זיך מיט פינפציפערדיקע טאבעלעס און אמאָל מיט זיבנציפערדיקע (צום ביישפּיל געאָרג וועגאס „לאָגאריפמיש-טריגאָנאָ־מעטרישער הילפסבוך"). דער מעטאָד פון באנוצן אזוינע טאבעלעס איז דערקלערט אינעם ארייַנפיר צו זיי.

אזוי ווי די כאראקטעריסטיק פונעם לאָגאריפם פון דער גאנצער צאָל אָדער פון דער דעצימאלער ברוכצאָל קאָנען מיר אפן גרונט פון די אייגנשאפטן פון דעצימאלע לאָגאריפמען אוועקשטעלן אליין, זיינען אין די טאבעלעס אריינגעשטעלט בלויז די מאנטיסעס; דערביי דארף מען זיך דערמאָנען, אז די לאגע פון דער קאָמע אין א דעצימאלער ברוכצאָל, און אויך די צאָל נולן, וואָס שטייען אפן סאָף פון דער צאָל, האָבן ניט קיין ווירקונג אף דער גרייס פון דער מאנטיסע. דעריבער באם געפינען די מאנטיסע לויט דער געגעבענער צאָל ווארפן מיר אָפ אין דער דאָזיקער צאָל די קאָמע און אויך די נולן אף איר סאָף, אויב זיי זיינען פאראן, און מיר געפינען די מאנטיסע פון דער גאנצער צאָל, וואָס האָט זיך אויסגעבילדעט נאָך דעם. דערביי קאָנען זיך ארויסווייזן פאָלגנדיקע פאלן:

1) **די גאנצע צאָל באשטייט פון דריי ציפער.** צום ביישפיל, לאָמיר דארפן געפינען די מאנטיסע פונעם לאָגאריפם פון דער צאָל 536. די ערשטע צוויי ציפער פון דער דאָזיקער צאָל, ד. ה., 5,3, געפינען מיר אין די טאבעלעס אין דער ערשטער פון לינקס ווערטיקאלער קאָלאָנקע (זע די טאבעלע, וואָס איז געדרוקט אף דער פאָרי־קער זייט). מיר געפינען די צאָל 53, און רוקן זיך פון איר איבער דער האָריזאָנ־טאלער שורע צו רעכטס ביז די דאָזיקע שורע וועט זיך איבערשניידן מיט דער ווער־טיקאלער קאָלאָנקע, וואָס גייט דורכ דורך יענער פון די ציפער 0, 1, 3,2....9, צע־שטעלטע אויבן (און אונטן) אין דער טאבעלע, וועלכע שטעלט מיט זיך פאָר די דריט־טע ציפער פון דער געגעבענער צאָל, ד. ה. אין אונדזער ביישפיל די ציפער 6. אינעם אָרט, ווו זיי שניידן זיך איבער, וועלן מיר באקומען די מאנטיסע 7292 ד. ה. 0,7292), וואָס געהערט צום לאָגאריפם פון דער צאָל 536. פונקט אזוי וועלן מיר פאר דער צאָל 508 געפינען די מאנטיסע 0,7059, פאר דער צאָל 500 וועלן מיר געפינען 0,6990 א. ד. ג.

2) **די גאנצע צאָל באשטייט פון צוויי אָדער פון איין ציפער.** דעמלט שטעלן מיר זיך פאָר, אז צו דער דאָזיקער צאָל איז צוגעשריבן איינער אָדער צוויי נולן און מיר געפינען די מאנטיסע פאר דער דרייציפערדיקער צאָל, וואָס האָט זיך אף אזא אופן אויסגעבילדעט. צום ביישפיל, צו דער צאָל 51 שרייבן מיר צו איין נול, דערפון באקומען מיר 510 און געפינען די מאנטיסע 7076; צו דער צאָל 5 שרייבן מיר צו צוויי נולן און מיר געפינען די מאנטיסע 6990 א.א.וו.

3) **די גאנצע צאָל איז אויסגעדריקט דורך פיר ציפער.** צום ביישפיל, מע דארף געפינען די מאנטיסע פון *lg* 5436. דעמלט געפינען מיר אפריער אין די טאבעלעס, ווי ס'איז נאָרוואָס אָנגעוויזן געוואָרן, די מאנטיסע פון דער צאָל, וואָס איז אויסגעדריקט דורך די ערשטע דריי ציפער פון דער געגעבענער צאָל, ד. ה. פאר 543 (די דאָזיקע מאנטיסע וועט זיין 7348); נאָכדעם רוקן מיר זיך פון דער גע־פונענער מאנטיסע איבער דער האָריזאָנטאלער שורע אף רעכטס (אינעם רעכטן טייל טאבעלע, וואָס ליגט הינטערן דיקן ווערטיקאלן פאס) ביזן איבערשניידן זיך מיט דער ווערטיקאלער קאָלאָנקע, וואָס גייט דורך דורך יענער פון די ציפער: 1, 2, 3 ...9, צעשטעלטע אויבן (און אונטן) אינעם דאָזיקן טייל טאבעלע, וועלכע שטעלט מיט זיך פאָר די פערטע ציפער פון דער געגעבענער צאָל, ד. ה. אין אונדזער ביישפיל

די ציפער 6. אינעמ אָרט, ווו זיי שנײַדנ זיכ איבער, געפינענ מיר די אויסבעסערונג (די צאָל 5), וועלכע מע דארפ צולייגנ (אינ קאָפּ) צו דער מאנטיסע 7348, קעדיי צו באקומענ די מאנטיסע פונ דער צאָל 5436; מיר וועלנ באקומענ אפ אזא אופנ די מאנטיסע 0,7353.

4) די גאנצע צאָל איז אויסגעדריקט דורכ פינפ אָדער מער ציפער.

דעמלט ווארפנ מיר אָפּ אלע ציפער, כוצ די ערשטע פיר, אונ מיר נעמענ אנ אומ־געפערע פירציפערדיקע צאָל, דערבײַ פארגרעסערנ מיר די לעצטע ציפער פונ דער דאָזיקער צאָל אפ 1 אינ יענעמ פאל, ווענ די אָפּגעוואָרפענע פינפטע ציפער פונ דער צאָל איז 5 אָדער מער פונ 5. אשטייגער, אָנשטאָט 57842 נעמענ מיר 5784, אָנ־שטאָט 30257 נעמענ מיר 3026, אָנשטאָט 583263 נעמענ מיר 5833 א. ד. ג. פאר דער דאָזיקער פארקירצטער פירציפערדיקער צאָל געפינענ מיר די מאנטיסע אזוי, ווי עס איז נאָרוואָס דערקלערט געוואָרנ.

האלטנדיק זיכ בא די דאָזיקע אָנווײַזונגענ, לאָמיר פאר א בײַשפּיל געפינענ די לאָגאריפמענ פונ די פאָלגנדיקע צאָלנ:

36,5; 804,7; 0,26; 0,00345; 7,2634; 3456,06.

צוערשט לאָמיר, ניט ווענדנדיק זיכ דערווײַל צו די טאבעלעס, אוועקשטעלנ אײַנע כאראקטעריסטיקעס, לאָזנדיק אנ אָרט פאר מאנטיסעס, וועלכע מיר וועלנ אויסשרײַבנ נאָכדעמ:

$\lg\ 36{,}5 = 1\ldots;$	$\lg 0{,}00345 = \bar{3}\ldots;$
$\lg 804{,}7 = 2\ldots;$	$\lg 7{,}2634 = 0\ldots;$
$\lg 0{,}26 = \bar{1}\ldots;$	$\lg 3456{,}86 = 3\ldots;$

נאָכ דעמ שטעלנ מיר אויס לויט די טאבעלעס גלײַכ די מאנטיסעס:

$\lg\ 36{,}5 = 1{,}5623;$	$\lg 0{,}00345 = \bar{3}{,}5378;$
$\lg 804{,}7 = 2{,}9057;$	$\lg\ 7{,}2634 = 0{,}8611;$
$\lg\ 0{,}26 = \bar{1}{,}4150;$	$\lg 3456{,}86 = 3{,}5387.$

114. אינטערפּאָלירונג. אינ אייניקע פירציפערדיקע טאבעלעס זײַנענ קיינ אויסבעסערונגענ פאר דער פערטער ציפער פונ דער געגעבענער צאָל ניט ארײַנגע־שטעלט. אז מע האָט צו טאָנ מיט אזוינע טאבעלעס, קומט אויס די דאָזיקע אויסבע־סערונגענ צו געפינענ מיט דער הילפ פונ פּאָשעטער אויסרעכענונג, וועלכע מע קאָנ דורכמאכנ אפנ גרונט פונ פאָלגנדיקנ קלאל: אויב די צאָלנ שטײַגנ אריבער 100, אונ די דיפערענצנ צווישנ זיי זײַנענ קלענער פונ 1, קאָנ מענ אָנ א פילבארנ גרײַז אָנעמענ, אז:

די דיפערענצנ צווישנ די לאָגאַריפמענ זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל צו די דיפערענצנ צווישנ די אַנטשפּרעכיקע צאָלנ[1].

זאָל מענ, צומ בײַשפּיל, דאַרפנ געפינענ די מאַנטיסע, וואָס אַנטשפּרעכט דער צאָל 5367. די דאָזיקע מאַנטיסע איז, פאַרשטייט זיכ, די זעלביקע, וואָס פאַר דער צאָל 536,7. מיר געפינענ אינ די טאַבעלעס פאַר דער צאָל 536 די מאַנטיסע 7292. פאַרגלײַכנדיק די דאָזיקע מאַנטיסע מיט דער שכײנישער פונ רעכטס מאַנטיסע 7300, וואָס אַנטשפּרעכט דער צאָל 537, באַמערקנ מיר, אַז אויב די צאָל 536 וועט זיכ פאַרגרעסערנ אויפ 1, וועט זיכ איר מאַנטיסע פאַרגרעסערנ אויפ 8 צענטויזנטלעכ (8 איז די אַזוי גערופענע **טאַבעלע־דיפערענצ** צווישנ צוויי שכײנישע מאַנטיסעס); אויב אָבער די צאָל 536 וועט זיכ פאַרגרעסערנ אויפ 0,7, וועט זיכ איר מאַנטיסע פאַרגרעסערנ ניט אויפ 8 צענטויזנטלעכ, נאָר אויפ אַ געוויסער קלענערער צאָל, x צענטויזנטלעכ, וואָס לויט דער דערלאָזענער פּראָפּאָרציאָנעלקײַט דאַרפ זי באַפרידיקנ די פּראָפּאָרציע $x : 8 = 0{,}7 : 1$; פונוואַנענ $x = 8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$, וואָס נאָכנ פאַרקײַלעכנ וועט זי באַטרעפנ 6 צענטויזנטלעכ. הייסט עס, די מאַנטיסע פאַר דער צאָל 536,7 (אונ, אַזוי אַרומ, אויכ פאַר דער צאָל 5367) וועט זײַנ:

$$7292 + 6 = 7298.$$

לאָמיר באַמערקנ, אַז דאָס געפינענ לויט צוויי צאָלנ, וואָס שטייענ אינ די טאַבעלעס איינע לעבנ דער אַנדערער, אַ צווישנצאָל רופט זיכ **אינטערפּאָלירונג**. די אינטערפּאָלירונג, וואָס איז דאָ באַשריבנ, רופט זיכ **פּראָפּאָרציאָנעלע**, ווײַל זי שטיצט זיכ אויפ דעמ דערלאָזענעמ פּאָסטולאַט, אַז די ענדערונג פונעמ לאָגאַריפמ איז פּראָפּאָרציאָנעל צו דער ענדערונג פונ דער צאָל. זי רופט זיכ אויכ לינעאַלע ווײַל זי נעמט אָנ, אַז גראַפיש דריקט זיכ אויס די ענדערונג פונ דער לאָגאַריפמישער פונקציע דורכ אַ גראָדער ליניע.

115. טאַבעלעס פונ אַנטילאָגאַריפמענ. אויפ צו געפינענ אַ צאָל לויט דעמ געגעבענעמ לאָגאַריפמ קאָנענ דינענ די זעלביקע טאַבעלעס, אינ וועלכע מע זוכט אויס די מאַנטיסעס פונ די געגעבענע צאָלנ; אָבער באַקוועמער איז צו באַנוצנ זיכ מיט אַנדערע טאַבעלעס, אינ וועלכע עס זײַנענ געגעבנ געוואָרנ די אַזוי גערופענע

[1]) אַז מיר באַטראַכטנ די גראַפיק פונ דער לאָגאַריפמישער פונקציע $y = \log_{10} x$ (§ 103) באַמערקנ מיר, אַז אַפילע פאַר צאָלנ ניט קיינ גרויסע (צומ בײַשפּיל, פאַר צאָלנ פונ 3 ביז 10) שיידט זיכ די גראַפיק זייער ווייניק אונטער פונ אַ גראָדער ליניע. אויב מע זאָל די דאָזיקע גראַפיק פאָרזעצנ אויפ רעכטס פאַר די צאָלנ פונ 10 ביז 100 (ד. ה. אויפ 90 איינסנ לענגויס דער x־אַקס), וואָלטנ די אָרדינאַטעס אויסגעוואַקסנ בלויז פונ 1 ביז 2, ווײַל $\lg 10 = 1$, אונ $\lg 100 = 2$; אַז מע זאָל זי פאָרזעצנ ווײַטער פאַר די צאָלנ פונ 100 ביז 1000 (ד. ה. אויפ 900 איינסנ די לענג), וואָלטנ זיכ די אָרדינאַטעס פאַרגרעסערט ווידער בלויז אויפ 1 איינס. הייסט עס, פאַר צאָלנ, וואָס זײַנענ גרעסער פונ 100, קאָנענ מיר אַ פילבאַרנ גרײַז אָנעמענ, אַז די גראַפיק פונ דער פונקציע $y = \log_{10} x$ פאַלט צונויפ מיט אַ גראָדער. אָבער דערלאָזנ דאָס הייסט אָנעמענ, אַז פאַר אַזעלכע צאָלנ זײַנענ אָנוווּקסנ פונ די אָרדינאַטעס פּראָפּאָרציאָנעל צו די אָנוווּקסנ פונ די אַבסציסעס, ד. ה., מיט אַנדערע ווערטער, אַז די דיפערענצנ צווישנ די לאָגאַריפמענ זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל צו די דיפערענצנ צווישנ די צאָלנ.

אנטילאָגאריפמען, ד. ה. צאָלן, וואָס אנטשפּרעכן די געגעבענע מאנטיסעס. ניט קיין גרויסער טייל זייערער איז געגעבן געוואָרן אפ דער דאָזיקער זייט (אפ דערקלערן).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*123*	*456*	*789*
.25	1 778	1 782	1 786	1 791	1 795	1 799	1 803	1 807	1 811	1 816	*011*	*222*	*334*
.26	1 820	1 824	1 828	1 832	1 837	1 841	1 845	1 849	1 854	1 858	*011*	*223*	*334*
.27	1 862	1 866	1 871	1 875	1 879	1 834	1 888	1 892	1 897	1 901	*011*	*223*	*334*
.28	1 905	1 910	1 914	1 919	1 923	1 928	1 932	1 936	1 941	1 945	*011*	*223*	*334*
.29	1 950	1 954	1 959	1 963	1 968	1 972	1 977	1 982	1 936	1 991	*011*	*223*	*334*
.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

זאָל זײַן געגעבן א פּירציפּערדיקע מאנטיסע 2863 (אפ דער כאראקטעריסטיק ליגן מיר ניט קיין אכט) און עס פאָדערט זיך צו געפינען די אנטשפּרעכנדיקע אנצע צאָל. דעמלט, האָבנדיק טאבעלעס פון אנטילאָגאריפמען, דארפ מען באנוצן זיך מיט זיי פּונקט אזוי, ווי ס'איז פריִער דערקלערט געוואָרן אפ צו געפינען מאנטיסעס לויט דער געגעבענער צאָל, און נעמלעך: די ערשטע צוויי ציפער פון דער מאנטיס זעפינען מיר אין דער ערשטער קאָלאָנקע פון לינקס (דער פּונקט, וואָס שטייט פאר די ציפער, פארבײַט מיט זיך די קאָמע, וואָס טיילט אָפּ די גאנצע צאָל באם לאָגא־ריפם פון דער מאנטיסע). נאָכדעם רוקן מיר זיך פון די דאָזיקע ציפער איבער דער האָריזאָנטאלער שורע אפ רעכטס ביזן איבערשנײַדן זיך מיט דער ווערטיקאלער קאָלאָנקע, וואָס גייט פון דער דריטער ציפער פון דער מאנטיסע, וועלכע מע דארפ הוכן אין דער אויבערשטער שורע (אָדער אין דער אונטערשטער). אין דעם אָרט, ווו זיי שנײַדן זיך איבער, געפינען מיר די פּירציפּערדיקע צאָל 1932, וועלכע אנטשפּרעכט דער מאנטיסע 286. נאָכדעם רוקן מיר זיך פון דער דאָזיקער צאָל ווײַטער איבער דער האָריזאָנטאלער שורע אפ רעכטס ביזן איבערשנײַדן זיך מיט דער ווערטיקאלער קאָלאָנקע, וואָס גייט פון דער פערטער ציפער פון דער מאנטיסע, וועלכע מע דארפ געפינען אויבן (אָדער אונטן) צווישן די דאָרטן אויסגעשטעלטע ציפער 1, 2, 3 ... 9. אינעם אָרט, ווו זיי שנײַדן זיך איבער, געפינען מיר די אויס־בעסערונג 1, וועלכע מע דארפ צולייגן (אין קאָפּ) צו דער פריִער געפונענער צאָל 1932, קעדיי צו געפינען די צאָל, וואָס אנטשפּרעכט דער מאנטיסע 2863.

אפ אזא אויפן וועט די דאָזיקע צאָל זײַן 1933. נאָכ דעם דארפ מען, לייגנדיק אכט אפ דער כאראקטעריסטיק, אוועקשטעלן אין דער צאָל 1933 די קאָמע אפן געהעריקן אָרט.

לאָמיר ברענגען עטלעכע בײַשפּילן:

אויב $\lg x = 3{,}2863$, איז $x = 1933$

„ $\lg x = 1{,}2863$, „ $x = 19{,}33$

„ $\lg x = 0{,}2863$, „ $x = 1{,}933$

„ $\lg x = \bar{2}{,}2863$, „ $x = 0{,}01933$

„ $\lg x = 0{,}2287$, „ $x = 1{,}693$

„ $\lg x = \bar{1}{,}7635$, „ $x = 0{,}5801$

„ $\lg x = 3{,}5029$, „ $x = 3184$

„ $\lg x = \bar{2}{,}0436$, „ $x = 0{,}01106$

א. ד. ג.

אויב אין דער מאנטיסע איז אָנגעוויזן 5 אָדער מערער ציפער, נעמען מיר בלויז די ערשטע 4 ציפער, אָפּוואַרפנדיק די איבעריקע (און פארגרעסערנדיק די פערטע ציפער אף 1, אויב די פינפטע ציפער איז 5 אָדער מערער). צום בײַשפּיל, אַנשטאָט דער מאנטיסע 35478 נעמען מיר 3548, אַנשטאָט 47562 נעמען מיר 4756.

116. באמערקונג וועגן אינטערפּאָלירונג. די אויסבעסערונג אף דער פערטער און אף די ווײַטערדיקע ציפער פון דער מאנטיסע קאָן מען געפינען אויך דורך אינטערפּאָלירונג. אשטייגער, אויב די מאנטיסע וועט זײַן 84357, איז, געפינענדיק די צאָל 6966, וועלכע אנטשפּרעכט דער מאנטיסע 843, קאָנען מיר טראכטן ווײַטער אזוי: אויב די מאנטיסע פארגרעסערט זיך (אף 1 טויזנטל), ד. ה., זי וועט ווערן 844, וועט די צאָל, ווי מע זעט פון די טאבעלעס, פארגרעסערן זיך אף 16 איינסן, אויב אָבער די מאנטיסע וועט זיך פארגרעסערן ניט אף 1 (טויזנטל), נאָר אף 0,57 (טויזנטלעך), וועט די צאָל פארגרעסערן זיך אף x איינסן, דערבײַ דארף x באפרידיקן דער פּראָפּאָרציע:

$$x : 16 = 0{,}57 : 1,$$

פונוואנען

$$x = 16 . 0{,}57 = 9{,}12.$$

הייסט עס, אז די געזוכטע צאָל וועט זײַן $6966 + 9{,}12 = 6975{,}12$, אָדער (אויב מיר וועלן זיך באגרענעצן מיט פיר ציפער) 6975.

117. אקטן איבער לאָגאריפמען מיט נעגאטיווע כאראקטעריסטיקעס. כיבער און כיסער פון לאָגאריפמען שטעלן מיט זיך ניט פאָר קיינשום שוועריקייטן, ווי מע זעט עס ארויס פון פאָלגנדיקע בײַשפּילן:

$$+\begin{array}{r}\bar{2}{,}9734\\1{,}8302\\\hline 0{,}8036\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\bar{3}{,}8384\\\bar{5}{,}8804\\\hline \bar{7}{,}7188\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\bar{1}{,}0384\\5{,}9630\\\hline \bar{7}{,}0754\end{array}\qquad -\begin{array}{r}0{,}0052\\\bar{4}{,}5736\\\hline 3{,}4316\end{array}$$

עס שטעלט ניט פאָר קיינשומ שוועריקייטנ אויכ קייפל פונ א לאָגאריפמ אפ א פּאָזיטיווער צאָל, צומ ביישפּיל:

$$\begin{array}{r} \bar{3},5837 \\ \times\quad 9 \\ \hline \overline{22},2533 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2},4735 \\ \times\ 34 \\ \hline 18940 \\ 14205\ \\ \hline 16,0990 \\ -68\qquad \\ \hline \overline{52},0990. \end{array}$$

אינ דעמ לעצטנ ביישפּיל איז באזונדער געקייפלט די פּאָזיטיווע מאנטיסע אפ 34, נאָכדעמ די נעגאטיווע כאראקטעריסטיק—אפ 34.

אויב א לאָגאריפמ מיט א נעגאטיווער כאראקטעריסטיק אונ א פּאָזיטיווער מאנ־טיסע ווערט געקייפלט אפ א נעגאטיווער צאָל, באגייט מענ זיכ אפ צווייערליי אופאנימ: אָדער מע פארוואנדלט אפריער דעמ געגעבענעמ לאָגאריפמ אינ א נעגא־טיוונ, אָדער מע קייפלט באזונדער די מאנטיסע אונ די כאראקטעריסטיק אונ די רעזולטאטנ פאראייניקט מענ, צומ ביישפּיל:

$$\bar{3},5632\cdot(-4)=-2,4368\cdot(-4)=9,7472;$$
$$\bar{3},5632\cdot(-4)=+12-2,2528=9,7472.$$

בא כילעק קאָנענ זיכ ארויסשטעלנ צוויי פאלנ: 1) די נעגאטיווע כאראקטערי־סטיק טיילט זיכ אונ 2) טיילט זיכ ניט אָפּנ טיילער. אינעמ ערשטנ פאל טיילט מענ באזונדער די כאראקטעריסטיק אונ די מאנטיסע:

$$\overline{10},3784:5=\bar{2},0757.$$

אינעמ צווייטנ פאל גיט מענ צו צו דער כאראקטעריסטיק אזויפיל נעגאטיווע איינסנ, אז די אויסגעבילדעטע צאָל זאָל זיכ טיילנ אָפּנ טיילער; צו דער מאנטיסע גיט מענ צו פּונקט אזויפיל פּאָזיטיווע איינסנ:

$$\bar{3},7608:8=(-8+5,7608):8=\bar{1},7201.$$

די דאָזיקע אומבילדונג דארפ מענ מאכנ אינ קאָפּ, אזוי אז דער אקט ווערט אויסגעשטעלט אזוי:

$$\bar{3},7608:8=\bar{1},7201$$

אָדער

$$\begin{array}{r|l} \bar{3},7608 & 8 \\ \hline & \bar{1},7201. \end{array}$$

118. פארבייטנ כיסער פונ לאָגאריפמענ אפ כיבער. באמ אויסרעכענענ א וואָסערנ ניט איז קאָמפּליצירטנ אויסדרוק מיט דער הילפ פונ לאָגאריפמענ קומט אויס אייניקע לאָגאריפמענ צונויפלייגנ, אנדערע אראָפּנעמענ; אינ אזא פאל, באמ געוויינלעכנ מעטאָד פונ מאכנ די אקטנ, געפינט מענ באזונדער די סומע פונ די

לאָגאַריטמען, וועלכע מע דאַרף צונויפלייגן, נאָכדעם די סומע פון די פאַרמינערערס און פון דער ערשטער סומע נעמט מען אַראָפּ די צווייטע. צום בײַשפּיל, אויב מיר האָבן

$$\lg x = 2{,}7305 - \bar{2}{,}0740 + \bar{3}{,}5464 - 8{,}3589,$$

וועט זיך דער געוויינלעכער גאַנג פון די אַקטן פאַנאַנדערלייגן אַזוי:

$$+\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ \bar{3}{,}5464 \\ \hline 0{,}2769 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \bar{2}{,}0740 \\ 8{,}3589 \\ \hline 6{,}4329 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 0{,}2769 \\ 6{,}4329 \\ \hline \bar{7}{,}8440 = \lg x. \end{array}$$

עס איז פאַראַן פונדעסטוועגן אַ מעגלעכקייט צו פאַרבײַטן כיסער אַפּ כיבער. אַשטייגער:

$$-\bar{2}{,}0740 = 2 - 0{,}0740 = 1{,}9260$$

$$-8{,}3589 = -\overset{-1+1}{8{,}3589} = \bar{9}{,}6411.$$

איצטער קאָן מען פאַנאַנדערשטעלן די אויסרעכענונג אַזוי:

$$\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ 1{,}9260 \\ \bar{3}{,}5464 \\ \bar{9}{,}6411 \\ \hline \bar{7}{,}8440 = \lg x. \end{array}$$

119. בײַשפּילן אַפּ אויסרעכענונגען מיט דער הילף פון לאָגאַריטמען.

בײַשפּיל 1. רעכנט אויס דעם אויסדרוק:

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \cdot \sqrt[3]{D}};$$

אויב $A = 0{,}8216$, $B = 0{,}04826$, $C = 0{,}005127$, און $D = 7{,}246$ מיר לאָגאַריטמירן דעם געגעבענעם אויסדרוק:

$$\lg x = \frac{1}{3}\lg A + 4\lg B - 3\lg C - \frac{1}{3}\lg D.$$

איצטער, קעדיי ניט פאַטערן קיין איבעריקע צײַט און קעדיי צו פאַרקלענערן די מעגלעכקײַט פון גרײַזן, לאָמיר צוערשט צעשטעלן אַלע אויסרעכענונגען, ניט מאַכנדיק זיי דערווײַלע און ניט ווענדנדיק זיך, הייסט עס, צו די טאַבעלעס:

$\lg A = \lg 0{,}8216 = \bar{1},\ .\ .\ .\ .$	$\frac{1}{3}\lg A =$
$\lg B = \lg 0{,}04826 = \bar{2},\ .\ .\ .\ .$	$4\lg B =$
$\lg C = \lg 0{,}005127 = \bar{3},\ .\ .\ .\ .$	$-3\lg C =$
$-3\lg C\ .\ .\ .\ =$	$-\frac{1}{3}\lg D =$
$\lg D = \lg 7{,}246 = 0,\ .\ .\ .\ .$	$\lg x =$
$\frac{1}{3}\lg D\ .\ .\ .\ =$	$x =$

נאָכדעם נעמען מיר די טאַבעלעס און שטעלן אַריין די לאָגאַריטמען אין די געלאָזענע פרייע ערטער:

$$\lg A = \lg 0{,}8216 = \bar{1}{,}9145$$
$$\lg B = \lg 0{,}04826 = \bar{2}{,}6835$$
$$\lg C = \lg 0{,}005127 = \bar{3}{,}7099$$
$$3 \lg C \ldots\ldots = \bar{7}{,}1297$$
$$\lg D = \lg 7{,}246 \ . = 0{,}8601$$
$$\frac{1}{3} \lg D \ \ldots\ldots = 0{,}2867$$

$$\frac{1}{3} \lg A = \bar{1}{,}9715$$
$$4 \lg B = \bar{6}{,}7340$$
$$-3 \lg C = 6{,}8703$$
$$\frac{1}{3} \lg D = \bar{1}{,}7133$$
$$\lg x = 1{,}2891$$
$$x = 19{,}45.$$

ביישפּיל 2.

רעכנט אויס:

$$x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}.$$

אַזוי ווי נעגאַטיווע צאָלן האָבן ניט קיין לאָגאַריטמען, געפינען מיר אַפריער

$$x' = (2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$$

לויט דער פאַנאַנדערלייגונג:

$$\lg x' = 3 \lg 2{,}31 + \frac{1}{5} \lg 72.$$

נאָכן אויסרעכענען וועט זיך אַרויסווייזן: $x' = 28{,}99$, הייסט עס $x = -28{,}99$.

ביישפּיל 3.

אויסרעכענען:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}.$$

קיין דורכויסיקע לאָגאַריטמירונג קאָן מען דאָ ניט אָנווענדן, ווייל אונטערן ראַדיקאַל־צייכן שטייט אַ סומע. אין אַזאַ פאַלן רעכנט מען אויס די פאָרמולע טיילנווייז. אַפריער געפינען מיר $N = \sqrt[5]{8}$, נאָכדעם $N_1 = \sqrt[4]{3}$; ווייטער באַשטימען מיר דורך פּאָשעטן ביבער $N + N_1$ און, ענדלעך, רעכענען מיר אויס $\sqrt[3]{N + N_1}$; ווייזט זיך אַרויס:

$$N = 1{,}514; \ N_1 = 1{,}316;$$
$$N + N_1 = 2{,}830.$$
$$\lg x = \lg \sqrt[3]{2{,}830} = \frac{1}{3} \lg 2{,}830 = 0{,}1506; \ x = 1{,}415.$$

גענייטונגען.

195. בא פאָלגנדיקע נעגאַטיווע לאָגאַריטמען מאַכט די מאַנטיסעס פאַר פּאָזיטיווע:

$-2{,}3789$; $-1{,}0760$; $-0{,}0058$; $-5{,}6700$.

196. פאָלגנדיקע לאָגאַריטמען פאַרוואַנדלט אין נעגאַטיווע:

$\bar{2}{,}7359$; $\bar{1}{,}0803$; $\bar{4}{,}0760$; $\bar{1}{,}0023$.

געפינט אינ טאבעלעס די לאגאריטמענ פונ די פאלגנדיקע צאלנ:

197. 9; 26; 573; 55,78; 7,414; 0,7557.

198. 5,634; 10,083; 0,20738; 0,00534.

געפינט די צאלנ לויט די פאלגנדיקע לאגאריטמענ:

199. 2,8676; 1,3496; 0,0111; 3,1412.

200. 1,6628; 2,3114; 0,5100; 1,5806.

201. 3,7467; −1,0834; —0,6347; −3,9134.

(אינ די לעצטע דרײַ בײַשפּילנ דארפ מענ אפריער אומבילדנ די לאגאריטמענ).

מאכט די פאלגנדיקע אקטנ איבער לאגאריטמענ:

202. $+\begin{cases}2,7308\\ \bar{3},9683\end{cases}; \quad +\begin{cases}1,5734\\ \bar{2},8430\end{cases} \quad +\begin{cases}\bar{2},0387\\ \bar{1},7857\end{cases}.$

203. $-\begin{cases}0,3756\\ \bar{2},7489\end{cases}; \quad \bar{2},7403\times 7.$

204. $\bar{1},4018\times 9;\ \bar{3},5612\times 36.$

205. $\bar{3},5603\times(-23);\ \overline{12},6310:4.$

206. $\bar{3},0274:5;\ \bar{2},5074:7.$

אינ פאלגנדיקע בײַשפּילנ פארבײַט כיסער אפ כיבער:

207. —3,2603; —7,5920; —0,4168.

208. $-\bar{1},5609;\ -\bar{2},3754;\ -\bar{3},0406.$

רעכנט אויס מיט דער הילפ פונ לאגאריטמענ פאלגנדיקע אויסדרוקנ:

209. $0,03714^3;\ \sqrt[3]{0,3571};\ \sqrt[6]{235,8}.$

210. $\sqrt[3]{\frac{13}{17}};\ \sqrt[3]{17705};\ \sqrt[3]{\frac{1}{85\cdot 77}}.$

211. $\left(2\frac{5}{6}\right)^9;\ \frac{0,7361\cdot 0,03715}{2,165\cdot 0,8717}.$

212. $\sqrt[3]{\frac{0,07624}{3,142\cdot 27,05}};\ \sqrt{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}.$

213. $\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}};\ 2,718^{-3,142}.$

214. וויפל ציפער דארפ זײַנ אינ דער צאל 3^{20}?

215. א ליכט-שטראל, דורכגײענדיק דורכ א גלעזערנע שײַבל, פארלירט $\frac{1}{10}$ פונ זײַנ אינטענסיווקײַט. וואס פאר א טייל פונ דער אנפאנגלעכער אינטענסיווקײַט וועט בלײַבנ בא דעם שטראל, ווענ ער וועט דורכגײנ דורכ 10 אזעלכע שײַבלעכ?

216. רעכנט אויס דעמ פארנעמ פונ א קײַלעכ לויט דער פארמולע $V=\frac{1}{3}\pi R^3$, אויב $R=5,875$ אונ $\pi=3,142$.

217. רעכנט אויס דעמ שטעטכ S פונ דרײַעק מיט די זײַטנ a, b אונ c לויט דער פארמולע:

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

אינ וועלכער p איז א האלבער פערימעטער פונ דרײַעק, ד. ה. $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, אויב די זײַטנ וועלנ זײַנ:

1) 6 סמ; 8 סמ; 9 סמ; 2) 0,927 מ; 1,135 מ; 0,675 מ.

218. דער פארנעם V פונ א פוסטנ צילינדער, וואָס זײַנ הייכ איז h, דער אויסערלעכער ראַדיוס פונ באזיס איז R אונ דער אינווייניקסטער ראַדיוס r, דריקט זיכ אויס דורכ דער פאָרמולע

$$V = \pi(R^2 - r^2)h.$$

רעכנט אויס V, אויב

$$R = 74{,}35 \text{ מ}; \; r = 42{,}63 \text{ מ}; \; h = 132{,}8; \; \pi = 3{,}142.$$

219. דער דויער פונ איינ פאַשעטער וואקלונג פונעם אומרו (ד. ה. די צײַט, פאר וועלכער דער אומרו גייט איבער פונ דער עקסטער רעכטער לאגע צו דער עקסטער לינקער) דריקט זיכ אויס דורכ דער פאָרמולע (אויב דער אָפנייג־ווינקל פונעם אומרו בענעגייע דער ווערטיקאלער ליניע שטײַגט ניט אריבער $3°$):

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

וו t איז די צײַט (אינ סעקונדעס), l—די לענג פונעם אומרו (אינ סאנטימעטער), g—די פאר־גיכערונג פונ דער שווערקראפט (אינ סאנטימעטער פאר א סעקונדע) אונ π—די פארהעלטעניש צווישנ דער לענג פונ דער קרײַזליניע אונ דעם דיאמעטער. געפינט די צײַט t, אויב $l = 100$ סמ; $g = 981{,}5$ סמ אונ $\pi = 3{,}141$.

120. דער באנוצ פונ פינפציפערדיקע טאבעלעס.

פאר פינקטלעכערע אויסרעכענונגענ באנוצט מענ פינפציפערדיקע טאבעלעס פונ לאָגאריפמענ. אינ די דאָזיקע טאבעלעס זײַנענ די לאָגאריפמענ פונ די צאָלנ אויסגערעכנט מיט א פינקטלעכקײַט ביז 0,00001 (ריכטיקער—מיט א פינקטלעכקײַט ביז 0,000005). אמערסטנ ווערנ באנוצט די טאבעלעס, וואָס עס האָט צונויפגעשטעלט יע. פרזשעוואלסקי. מירנ דאָ געבנ קורצע אָנווײַזונגענ, וויאזוי זיי צו באנוצנ.

1. דאָס ערשטע זײַטל פונ די טאבעלעס אנטהאלט די מאנטיסעס פונ די צאָלנ ביז 100. געוויינלעכ אָבער באנוצט מענ זיכ מיט דעם דאָזיקנ זײַטל וויייניק, אונ מע זוכט בעסער די דאָזיקע מאנטיסעס צווישנ די דרײַציפערדיקע צאָלנ. צום בײַ־שפיל, קעדיי צו געפינענ די מאנטיסע פונ די צאָלנ 67; 6,7; 0,0067 א. א. וו., שרײַבט מענ אופ די אנטשפרעכנדיקע כאראקטעריסטיק אונ מע זוכט די מאנטיסע פונ דער צאָל 670.

2. לאָמיר זאָגנ, אז עס רעדט זיכ וועגנ א צאָל, וואָס האָט דרײַ באדײַטיקע ציפער (מיר דערמאָנענ, אז א נול, וואָס שטייט צווישנ באדײַטיקע ציפער, ווערט אויכ אָנגענומענ פאר א באדײַטיקער ציפער). מע זוכט די דאָזיקע צאָל אפנ אָנט־שפרעכנדיקנ זײַטל אינ דער לינקער עקסטער קאָלאָנקע (זי איז באצייכנט דורכנ בוכשטאב N). אינ דער קאָלאָנקע, וואָס לעבנ איר, אונטערנ צייכנ 0, געפינט מענ די אנטשפרעכנדיקע מאנטיסע.

3. לאָמיר זאָגנ, אז די צאָל האָט פיר באדײַטיקע ציפער. דעמלט זוכט מענ אינ דער קאָלאָנקע די צאָל, וואָס באשטייט פונ די ערשטע דרײַ ציפער פונ דער געגעבענער.

אינ דער האָריזאָנטאלער ריי, אינ דער קאָלאָנקע, וואָס אנטשפרעכט דער פערטער ציפער פונ דער געגעבענער צאָל, געפינענ מיר די געזוכטע מאנטיסע.

ב ײַ ש פ י ל. געפינט $\lg 84{,}37$. די כאראקטעריסטיק איז גלײַכ צו 1. זוכנ מיר אינ דער קאָ־לאָנקע די צאָל 843. מיר גייענ פונ דער דאָזיקער צאָל אפ רעכטס. אינ דער

קאָלאָנקע אונטער דער ציפער 7 געפינען מיר די אנטשפּרעכנדיקע מאַנטיסע 92619. איז הייסט עס, $\lg 84{,}37$ גלײַך צו 1,92619.

4. די צאָל אנטהאלט מער פון פיר באַדײַטיקע ציפער. מיר נעמען אַ צאָל, וואָס איז, צונויפגעשטעלט פון די ערשטע 4 ציפער, און מיר זוכן איר מאַנטיסע. ווײַטער באַגייען מיר זיך פּונקט אזוי, ווי אין די פינפציפערדיקע טאַבעלעס, ד. ה. אָדער מיר שטעלן צונויף אַ פּראָפּאָרציע, אָדער מיר באַנוצן זיך מיט די טאַבעלעס, וואָס געפינען זיך אין דער עקסט-רעכטער קאָלאָנקע אונטערן צייכן P. P. (partes proportionales, ד. ה. פּראָפּאָרציאָנעלע טיילן).

ב ײַ ש פּ י ל.

$\lg$ פון 187,367. זוכן מיר די צאָל 187, און אין דער קאָלאָנקע 3 געפינען מיר די מאַנטיסע 27254. מיר געפינען די דיפערענץ צווישן דער פאָלגנדיקער מאַנטיסע און דער געפונענער (די טאַבעלע-דיפערענץ). זי איז גלײַך צו 23 אין דער עקסט-רעכטער קאָלאָנקע אונטער דער ציפער 23 פאַר דער ציפער 6 געפינען מיר 13,8 הונדערט טויזנטלעך, פאַר 7 געפינען מיר 16,1. די אויסרעכענונגען צעשטעלן מיר אזוי:

$$\begin{array}{r@{\qquad\qquad}r} 1873 & 27\,254 \\ 6 & 13\,8 \\ 8 & 1\,6\,1 \\ \hline 187\,368 & 27\,269\,4\,1 \end{array}$$

איז, הייסט עס: $\lg 187{,}367 = 2{,}27269$.

IV. ווײַזערדיקע און לאָגאַריפמישע גלײַכונגען.

121. בײַשפּילן פון גלײַכונגען. ווײַזערדיקע גלײַכונגען ווערן אָנגערופן אזוינע, וווּ דער אומבאַוווּסטער גייט אַרײַן אינעם מאַדרייגע-ווײַזער; לאָגאַריפמישע ווערן אָנגערופן אזוינע, וווּ דער אומבאַוווּסטער גייט אַרײַן אונטערן צייכן $\lg$. אזוינע גלײַכונגען קאָנען געלייזט ווערן בלויז אין באַזונדערע פאַלן, דערבײַ קומט אויס זיך צו שטיצן אָף די אייגנשאַפטן פון לאָגאַריפמען און אָף דעם פּרינציפּ, אַז אויב די צאָלן זײַנען גלײַך, זײַנען אויך גלײַך זייערע לאָגאַריפמען, און פאַרקערט, אויב די לאָגאַריפמען זײַנען גלײַך, זײַנען אויך גלײַך די צאָלן, וועלכע אַנטשפּרעכן זיי.

ב ײַ ש פּ י ל 1.

לייזט די גלײַכונג:

$$2^x = 1024.$$

מיר לאָגאַריפמירן ביידע טיילן פון דער גלײַכונג:

$$x \lg 2 = \lg\ 1024; \quad x = \frac{\lg 1024}{\lg 2} = \frac{3{,}0103}{0{,}3010} = 10.$$

ב ײַ ש פּ י ל 2.

לייזט די גלײַכונג:

$$a^{2x} - a^x = 1.$$

ווענ מיר נעמענ אָנ, אז

$$a^x = y,$$

באקומענ מיר די קוואדראטע גלײַכונג:

$$y^2 - y - 1 = 0,$$

אונ פונדאנענ:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

הייסט עס,

$$a^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

אונ

$$a^x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

צוליב דעמ, וואָס

$$1 - \sqrt{5} < 0,$$

איז די לעצטע גלײַכונג ניט מעגלעכ (נעגאטיווע צאָלנ האָבנ ניט קיינ לאָגאריפמענ), אונ די ערשטע גיט:

$$x = \frac{\lg(1 + \sqrt{5}) - \lg 2}{\lg a}.$$

בײַשפּיל 3.

לייז די גלײַכונג:

$$\lg(a + x) + \lg(b + x) = \lg(c + x).$$

די גלײַכונג קאָנ מענ אופשרײַבנ אזוי:

$$\lg[(a + x)\ (b + x)] = \lg(c + x).$$

פונ דער גלײַכקײַט פונ די לאָגאריפמענ אורטיילנ מיר וועגנ דער גלײַכקײַט פונ די צאָלנ בא גלײַכע באזיסנ:

$$(a + x)\ (b + x) = c + x.$$

דאָס איז א קוואדראט-גלײַכונג, וואָס די לייזונג אירע מאכט ניט קיינ שוועריקײַטנ.

122. פאָרמולע פונ קאָמפּליצירטע פּראָצענטנ. אופגאבע.

אינ וואָס פאר א סומע וועט אינ פארלויפ פונ t יאָר פארוואנדלט ווערנ א קאפיטאל פונ a רובל, אויב ער וועט ארײַנברענגענ יערלעכ p קאָמפּליצירטע פּראָצענטנ?

מע זאָגט, אז א קאפיטאל איז אָפּגעגעבנ אפ קאָמפּליצירטע פּראָצענטנ, אויב עס ווערנ גענומענ אינ אכט די אזוי גערופענע „פּראָצענטנ פונ פּראָצענטנ", ד. ה., אויב די פּראָצענטנ, וואָס ווערנ ארופגערעכנט אפנ קאפיטאל, ווערנ צומ סאָפ פונ יעדנ יאָר צוגעלייגט צומ קאפיטאל, כּדי עס זאָלנ אינ די ווײַטערדיקע יאָרנ אפ זיי אָנוואקסנ פּראָצענטנ.

יעדער רובל פונעם קאַפּיטאַל, וואָס איז אָפּגעגעבן אַף p פּראָצענט, טראָגט אַריַין אין פאַרלויף פון איין יאָר $\frac{p}{100}$ רובל, און, אַזוי אַרום, פאַרוואַנדלט זיך יעדער רובל קאַפּיטאַל אין 1 יאָר צייַט אין $1+\frac{p}{100}$ רובל (צום בייַשפּיל, אויב דער קאַפּיטאַל איז אָפּגעגעבן אַף 5%, ווערט אין אַ יאָר אַרום יעדער רובל זייַנער פאַרוואַנדלט אין

$$1+\frac{5}{100}$$

ד. ה. אין $1,05$ רובל). באַצייכענענדיק צוליב קורצקייט די ברוכצאָל $\frac{p}{100}$ דורך אַ וועלכן עס איז איין בוכשטאַב, צום בייַשפּיל r, קאָנען מיר זאָגן, אַז יעדער רובל קאַפּיטאַל וועט זיך אין אַ יאָר אַרום פאַרוואַנדלען אין $1+r$ רובל, הייסט עס, a רובל וואָלט אין 1 יאָר צייַט פאַרוואַנדלט ווערן אין

$$a(1+r) \text{ רובל.}$$

נאָך אין אַ יאָר אַרום, ד. ה. אין 2 יאָר אַרום נאָכדעם, ווי עס האָבן אָנגעהויבן וואַקסן פּראָצענטן, וועט יעדער רובל פון די דאָזיקע

$$a(1+r) \text{ רובל.}$$

ווידעראַמאָל פאַרוואַנדלט ווערן אין $1+r$ רובל; הייסט דאָס, אַז דער גאַנצער קאַפּיטאַל וועט פאַרוואַנדלט ווערן אין

$$a(1+r)^2 \text{ רובל.}$$

אַף דעם וועלביקן אופן געפינען מיר, אַז אין 3 יאָר אַרום וועט דער קאַפּיטאַל זייַן

$$a(1+r)^3$$

אין 4 יאָר אַרום—

$$a(1+r)^4\ldots$$

ביכלאַל אין t יאָר אַרום, אויב t איז אַ גאַנצע צאָל, וועט ער זיך פאַרוואַנדלען אין

$$a(1+r)^t \text{ רובל.}$$

באַצייכענענדיק דעם ענדגילטיקן קאַפּיטאַל דורך A, וועלן מיר [אַף אַזאַ אופן האָבן פאָלגנדיקע פאָרמולע פון קאָמפּליצירטע פּראָצענטן:

$$A=a(1+r)^t,$$

דאָ

$$r=\frac{p}{100}.$$

פון דער דאָזיקער פאָרמולע איז גרינג צו געפינען יעטווידער פון די פיר צאָלן A, a, r, (p אָדער) און t, אויב די איבעריקע דריַי זייַנען באַוווּסט.

בײַשפּיל.

לאָמיר זאָגנ, אַז

$$a = 2300 \text{ ר.}$$
$$p = 4$$
$$t = 20 \text{ יאָר}$$

דעמלט גיט די פאָרמולע:

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04; \quad A = 2300\ (1{,}04)^{20}.$$

אפּ אויסרעכענענ דעמ A װענדנ מיר אָנ לאָגאריפמענ:

$$lg\,a = lg\,2300 + 20\,lg\,1{,}04 = 3{,}3617 + 20\cdot 0{,}0170 = 3{,}3617 + 0{,}3400 = 3{,}7017.$$

$$A = 5031 \text{ ר.}$$

באמערקונגענ. 1) אינ דעמ דאָזיקנ בײַשפּיל איז אונדז אויסגעקומענ $lg\,1{,}04$ קײפּלענ אפּ 20. אוױבוי די צאָל 0,0170 איז דער אומגעפּערער באטרעפ פונ $lg\,1{,}04$ מיט א פּינקטלעכקײַט ביז $\frac{1}{2}$ צענטויזנטל, איז דער פּראָדוקט פונ דער דאָזיקער צאָל אפּ 20 אויכ פּינקטלעכ ביז $20\cdot\frac{1}{2}$, ד. ה., ביז 10 צענטויזנטלעכ אָדער ביז אײנ טויזנטל. דעריבער קאָנענ מיר אינ דער סומע 3,7017 ניט גאראנטירנ ניט נאָר פאר דער ציפער פונ די צענטויזנטלעכ, נאָר אויכ פאר דער ציפער פונ די טויזנטלעכ. קעדיי צו קענענ אינ ענלעכע פאלנ באקומענ א גרעסערע פּינקטלעכקײַט, איז פאר דער צאָל $1+r$ גלײַכער צו נעמענ לאָגאריפמענ ניט קײנ פירציפערדיקע, נאָר מיט א גרעסערער צאָל ציפער, צומ בײַשפּיל, זיבנציפערדיקע. צו דעמ צוועק ברענגענ מיר דאָ ניט קײנ גרויסע טאבעלע, אינ װעלכער עס זײַנענ אויסגעשריבנ זיבנ־ציפערדיקע לאָגאריפמענ פאר אײניקע באטרעפנ פונ p.

p	$1+r$	$\lg(1+r)$
3	1,03	0,0128372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159881
4	1,04	0,0170333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0,0191163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201540
5	1,05	0,0211893

2) מיט דער פאָרמולע פון קאָמפּליצירטע פּראָצענטן קומט אויס זיך צו באַגעגנען ניט בלויז אין פינאַנציעלע פראַגן, נאָר אָפּטמאָל אויך באַם לייזן אויפגאַבעס, וואָס זיַינען גענומען פון נאַטור־פּראָצעסן, צום בײַשפּיל, באַם באַרעכענען די צאָל פון דער באַפעלקערונג פון א וועלכן עס איז לאַנד, דעם צוּוואוּקס פון דער צאָל ביימער אין וואַלד א. ד. גל.

גענימונגען.

220. $3^x = 243$; $2^{2x} = 512$; $5^{x+2} = 3125$.

221. $10^x = 3$; $5^x = 10$; $10^{4x} = 5{,}754$.

222. $4{,}097^x = 3652$; $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 2{,}48$.

223. $3^{\sqrt{x}} = 243$; $0{,}55^x = 2{,}718$; $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$.

224. $2^x + 4^x = 72$; $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$.

לייזט די גלייכונגען:

225. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg 2$.

226. $\frac{1}{3} \lg x^3 = 5 \lg x$

227. $\lg x^2 + \lg 8x = 2 \lg x + 2 \lg x^2$.

228. פון א רעזערוואַר, וואָס דער אינווייניקסטער פאַרנעם זײַנער איז גלײַך צו 6 דמ³, פּאָמפּעט מען אַרויס לופט מיט דער הילף פון א לופט־פּאָמפּע, וואָס דער זויג־צילינדער אירער האָט א פאַרנעם פון 2 דמ³. וויפל אויסשטײַגן פונעם קאָלבן דאַרף מען מאַכן, כדיי צו דערפירן די צעשיטערונג פון דער לופט אינעם רעזערוואַר ביז $\frac{1}{200}$ פון דער אָנפאַנגלעכער?

229. אין וויפל יאָר וועט זיך פאַרדאָפּלען א קאַפּיטאַל, וואָס איז אָפּגעגעבן געוואָרן אָפּ 5 קאָמפּליצירטע פּראָצענטן?

אָנווײַזונג. דער אָנפאַנגלעכער קאַפּיטאַל איז x, דער ענדגילטיקער איז $2x$; אין דער גלײַכונג וועט דער x פאַרקירצט.

230. דאָס זעלביקע, אויב דער קאַפּיטאַל איז אָפּגעגעבן אָפּ 4%.

231. ראַדי פאַרקלענערט זיך אין וואָג דורכן אויסשטראַלן, נעמלעך: אין פאַרלויף פון 1600 יאָר פאַרלירט יעדער גראַם ראַדי א העלפט פון זײַן וואָג. דריקט אויס דעם פאַרלוסט־פּראָצענט פון ראַדי אין א יאָר.

אָנווײַזונג. ווען מע זאָל דעם יאָריקן פאַרלוסט באַצייכענען דורכן $x\%$, בלײַבט איבעריאָרלעך $\frac{100-x}{100}\%$. דעריבער וועט די גלײַכונג זײַן:

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^{1600} = \frac{1}{2}.$$

232. די באַפעלקערונג פון א לאַנד פאַרגרעסערט זיך יערלעך אָפּ $1{,}2\%$. אָפּ וויפל וועט זיך די באַפעלקערונג פאַרגרעסערן (אין פּראָצענטן) אין 25 יאָר?

אכטער אָפּטייל.

אויספאָרשונג פון גלײַכונגען.

I. אויספאָרשונג פון גלײַכונגען פון דער ערשטער מאדרייגע מיט איין אומבאוווּסטן.

123. וואָס הייסט אויספאָרשן א גלײַכונג? אויספאָרשן א גלײַכונג הייסט באטראכטן אלע ספּעציפישע פאלן, וואָס קענען זײַן באם לייזן, און קלאָר מאכן זיך די באדײַטונג פון די דאָזיקע פאלן פאר דער אויפגאבע, וואָס פון איר באדינגונגען איז צוזאמענגעשטעלט געוואָרן די גלײַכונג.

124. די אלגעמיינע פאָרם פון א גלײַכונג פון דער ערשטער מאדרייגע מיט איין אומבאוווּסטן. מיר האָבן געזען פריִער (טייל I, § 88), אז א גלײַכונג פון דער ערשטער מאדרייגע מיט איין אומבאוווּסטן נאָך אלע געהעריקע אומענדערונגען (עפענען די קלאמערן, באפרײַען זיך פון די נענערס, איבערטראָגן די אומבאוווּסטע גלידער אין איין טייל פון דער גלײַכונג, און די באוווּסטע אין דער אנדערער; צונויפגיסן די ענלעכע גלידער) ווערט געבראכט צו אזא נאָרמאלער פאָרם:

$$ax = b,$$

וו a און b קענען זײַן פּאָזיטיוו, נעגאטיוו אָדער גלײַך צו נול.

לאָמיר באטראכטן, וואָס פאר א לייזונגען באקומט די דאָזיקע גלײַכונג בא פארשיידענע צאָליקע באדײַטונגען פון a און b.

125. פּאָזיטיווע לייזונג. אזא לייזונג באקומט זיך דעמלט, ווען די צאָלן a און b זײַנען ביידע פּאָזיטיוו אָדער ביידע נעגאטיוו. זאָל, צום בײַשפּיל, זײַן:

$$3x = 6$$

אָדער:

$$-3x = -6.$$

מיר וועלן באקומען:

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

אָדער:

$$x = \frac{-6}{-3} = 2.$$

א פּאָזיטיװע לייזונג, באַפרידיקנדיק די גלײַכונג, באַפרידיקט אויכ די אופגאַבע, װאָס פונ איר באַדינגונגענ איז צוזאַמענגעשטעלט די גלײַכונג, אויב נאָר אינ דער גלײַכונג זײַנענ אויסגעדריקט אַלע באַדינגונגענ פונ דער אופגאַבע. צײַטנװײַז אָבער טרעפט, אַז ניט אַלע באַדינגונגענ פונ דער אופגאַבע זײַנענ אויסגעדריקט אינ דער גלײַכונג; דעמאָלט קענ א פּאָזיטיװע לייזונג ניט באַפרידיקנ די אופגאַבע. מיר װעלנ ברענגענ א בײַשפּיל:

אופגאַבע. אַנ אַרבעטער־קרײַזל פונ 20 מאַנ (דערװאַקסענע אונ יוגנטלעכע) האָט געמאַכט א זאַמלונג אַפּ צו קויפנ ביכער פאַר דער ביבליאָטעק; דערבײַ האָט יעדער דערװאַקסענער אַרײַנגעטראָגנ צו 3 רובל, יעדער יוגנטלעכער צו 1 ר. װיפל איז געװענ אינ דעמ קרײַזל דערװאַקסענע אונ װיפל יוגנטלעכע, אויב די גאַנצע זאַמלונג האָט געגעבנ 35 ר.?

מיר באַצייכענענ די צאָל דערװאַקסענע מיט x; דעמאָלט װעט די צאָל יוגנטלעכע באַטרעפנ $(20—x)$; די זאַמלונג פונ די דערװאַקסענע האָט, אויב אַזוי, געגעבנ $3x$ רובל, אונ די זאַמלונג פונ די יוגנטלעכע $(20—x)$ רובל. אַזוי אַרומ, װעט די גלײַכונג זײַנ אַזא:

$$3x + (20 - x) = 35;$$

פונאַנענ:

$$x = 7\frac{1}{2}.$$

די דאָזיקע פּאָזיטיװע לייזונג באַפרידיקט די גלײַכונג, אָבער ניט די אופגאַבע, װײַל לויטנ זינ פונ דער אופגאַבע דאַרפ זײַנ די געזוכטע צאָל א גאַנצע. דער אונטערשייד צװישנ דער גלײַכונג אונ דער אופגאַבע איז דאָ אַרויסגעקומענ דערפונ, װאָס די גלײַכונג אַנטהאַלט ניט די דאָזיקע פאָדערונג פונ דער אופגאַבע, אַז די געזוכטע צאָל זאָל זײַנ א גאַנצע. די געגעבענע אופגאַבע װײַזט זיכ אַרויס פאַר אַנ אומעגלעכער.

126. נעגאַטיװע לייזונג. אַזא לייזונג פונ דער גלײַכונג $ax = b$ באַקומט זיכ דעמאָלט, װענ די צאָלנ a אונ b האָבנ קעגנזײַטלעכע צייכנס. זאָל זײַנ, צומ בײַשפּיל,

$$5x = -15$$

אָדער:

$$-5x = 15;$$

דעמאָלט איז:

$$x = -\frac{15}{5} = -3.$$

קעדיי צו באַװײַזנ, אינ װעלכנ זינ דאַרפ מענ אויסטײַטשנ די נעגאַטיװע לייזונג $x = -m$, לאָמיר װענדנ די אופמערקזאַמקײַט דערויפ, אַז אויב די צאָל $(-m)$ באַפרידיקט די געגעבענע גלײַכונג $ax = b$, דעמאָלט דאַרפ די גלײַכקײַט $-am = b$ װערנ א אידענטישקײַט; אויב אַזוי, באַפרידיקט די פּאָזיטיװע צאָל m אַנ אַנדער גלײַכונג $-ax = b$, װעלכע באַקומט זיכ פונ דער געגעבענער, אויב מע זאָל אינ איי

פֿאַרבײַטנ x אפ $-x$. אפֿנ גרונט פֿונ דער דאָזיקער באמערקונג קענענ מיר, באקומענדיק די נעגאטיװע לײזונג: $x=-m$, טאָנ אזוי: לאָמיר אינ דער גלײַכונג ענדערנ x אפ $-x$; מיר װעלנ באקומענ א נײַע גלײַכונג מיט דער פּאָזיטיװער לײזונג: $x=m$. די נײַע גלײַכונג אנטשפּרעכט ניט, פֿארשטײט זיכ, דער געגעבענער אופֿגאבע. אָבער, ארײַנטראכטנדיק זיכ אינ דער גלײַכונג, קענענ מיר לײַכט באשטימענ, װי דארפֿ מענ ענדערנ די אופֿגאבע, קעדײ זי זאָל האָבנ די פּאָזיטיװע לײזונג $x=m$.

פֿאר א בײַשפּיל לאָמיר נעמענ אזא אײנפֿאכע אופֿגאבע:

דער פֿאָטער איז אלט 40 יאָר, דער זונ 10 יאָר. אינ װיפֿל יאָר ארומ װעט דער פֿאָטער זײַנ אינ 7 מאָל עלטער פֿונ דעמ זונ.

מיר באצײכענענ די געזוכטע צאָל דורכ x.

ס'איז קלאָר, אז אינ x יאָר ארומ װעט דער פֿאָטער זײַנ אלט $40+x$ יאָר; דער זונ װעט דעמלט זײַנ אלט $10+x$ יאָר. לויט דער באדינגונג פֿונ דער אופֿגאבע האָבנ מיר:

$$40+x=7(10+x),$$

פֿונװאנענ:

$$x=-5.$$

אז מיר פֿארבײַטנ אינ דער גלײַכונג x אפ $-x$, באקומענ מיר א נײַע גלײַכונג:

$$40-x=7(10-x),$$

װאָס אנטשפּרעכט דער זעלביקער אופֿגאבע, אָבער מיט א געענדערטער פֿראגע; זי דארפֿ זײַנ אזא: מיט װיפֿל יאָר צוריק איז דער פֿאָטער געװענ אינ זיבנ מאָל עלטער פֿונ זונ?

פֿונ בײַשפּילנ, װאָס זײַנענ ענלעכ צו דעמ געגעבענעמ, קענ מענ זענ, אז א נעגאטיװע לײזונג דארפֿ מענ פֿארשטײנ אינ אזא זינ, װאָס איז קעגנזעצלעכ צו יענעמ, װי מע װאָלט פֿארשטײנ א פּאָזיטיװע לײזונג. צומ בײַשפּיל, אויב א פּאָזיטיװע לײזונג באטײַט די צײַט נאָכ א געװיסער געשעעניש, דעמלט באטײַט די נעגאטיװע לײזונג די צײַט, װאָס איז פֿריִער פֿאר דער דאָזיקער געשעעניש; אויב די פּאָזיטיװע לײזונ באטײַט האכנאָסע, דעמלט איז די נעגאטיװע—הויצאָע א. א. װ. אויב אָבער לויט די באדינגונגענ פֿונ דער אופֿגאבע קענ מענ ניט פֿארשטײנ די געזוכטע צאָל x אינ צװײ קעגנזעצלעכע באדײַטנ, דעמלט באװײַזט די נעגאטיװע לײזונג, אז די אופֿגאבע איז פּאָשעט אומעגלעכ.

127. נולִיקע לײזונג. לאָמיר זיכ פֿאָרשטעלנ, אז אינ דער גלײַכונג $ax=b$ איז די צאָל b גלײַכ צו נול, אונ דער קאָעפֿיציִענט a איז עפּעס א צאָל, װאָס שײדט זיכ אונטער פֿונ נול. זאָל, צומ בײַשפּיל, די גלײַכונג זײַנ אזא:

$$4x=0.$$

הײסט דאָס, די גלײַכונג פֿאָדערט, אז דער קײפֿל־פּראָדוקט $4x$ זאָל באטרעפֿנ נול. אָבער א קײפֿל־פּראָדוקט איז גלײַכ צו נול נאָר דעמלט, װענ אײנער פֿונ די מיט-

קייפלערס איז גלייַך צו נול; אזוי ארום, מוז דער מיטקייפלער x באַטרעפן נול. אין פון דער פאָרמולע $x = \frac{0}{4}$ זעט מען טאַקע, אַז $x = 0$.

די נוליקע לייזונג, באַפרידיקנדיק די גלייַכונג, באַפרידיקט אין אַלגעמיין אויך די אויפגאַבע.

אויפגאַבע. וואָס פאַר א צאָל דאַרף מען צוגעבן צום ציילער און צום דינמער פון דער ברוכצאָל $\frac{13}{26}$, קעדיי צו באַקומען $\frac{1}{2}$?

באַצייכענענדיק די געזוכטע צאָל דורך x, באַקומען מיר די גלייַכונג:

$$\frac{13+x}{26+x} = \frac{1}{2},$$

פונוואַנען:

$$26+2x = 26+x;$$
$$x = 0.$$

דאָס באַטייַט, אַז די געגעבענע ברוכצאָל גופא איז גלייַך צו $\frac{1}{2}$.

128. דער פאַל, ווען די גלייַכונג האָט ניט קיין וואָרצל. זאָל אין דער גלייַכונג $ax = b$ די צאָל a זייַן א נול, און b ניט גלייַך צו נול; צום בייַשפּיל:

$$0 \cdot x = 10.$$

אזא גלייַכקייַט איז אומעגלעך, ווייַל וואָסער צאָל מיר זאָלן ניט נעמען פאַר x, וועט דער קייפל־פּראָדוקט $0 \cdot x$ זייַן גלייַך צו 0, ניט צו 10.

זאָל, צום בייַשפּיל, די גלייַכונג זייַן אזא:

$$\frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{3} = 7 + \frac{5x}{6}.$$

מיר לייזן, ווי געוויינלעך (דער געמיינזאַמער דינמער איז 6); אזוי, אַז עס באַקומט זיך:

$$3x - 24 + 2x = 42 + 5x,$$

ד. ה.

$$5x = 66 + 5x$$

אָדער

$$5x - 5x = 66.$$

וואָס פאַר א צאָל מיר זאָלן ניט נעמען אָנשטאָט דעם x, וועט די דיפערענץ $5x - 5x$ זייַן גלייַך צו נול, ניט צו 66.

הייסט דאָס, די געגעבענע גלייַכונג האָט ניט קיין וואָרצל.

אויב, ניט באַמערקנדיק, אַז דער קאָעפיציענט a איז גלייַך צו נול, טיילן מיר אָפּ אים ביידע טיילן פון דער גלייַכונג $ax = b$, וואָלטן מיר באַקומען אזא פאָרמולע: $x = \frac{b}{a}$, וואָס וואָלט סאָפּקאָלסאָפּ אונדז געגעבן:

$$x = \frac{b}{0}.$$

אזוי ווי עס איז אוממעגלעך צו טיילן אפ נול, וואָלטן מיר פונ דער לעצטער פאָרמולע געמאכט דעם אויספיר, אז בא $a=0$ האָט ניט די גלײַכונג $ax=b$ קיינ וואָרצל (אונ די אופגאבע, הייסט דאָס, איז אוממעגלעך).

אָבער עס איז ווייניק צו באנוגענען זיך בלויז מיט דעם דאָזיקן אויספיר. עס איז נוצלעך אָנצוווײַזן אפ נאָך א וויכטיקן אומשטאנד, וואָס אפ צו קלאָר מאכן אים דארפן מיר אפריער באטראכטן, ווי ענדערט זיך א ברוכצאָל, אויב איר דײַטער פארקלענערט זיך אומבאגרענעצט, בײַם דער צײלער בלײַבט אָן אן ענדערונג.

129. ווי דארפ מענ פארשטיינ די גלײַכקײַט $\frac{m}{0}=\pm\infty$. זאָל אינ דער ברוכצאָל $\frac{m}{n}$ דער דײַטער אלץ פארקלענערן זיך אומבאגרענעצט, דערנעענטערנדיק זיך צו נול, אונ דער צײלער פארבלײַבן אומפארענדערלעך.

לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אז דער דײַטער n באקומט אזעלכע אלץ קלענערע באדײַטונגען:

$$n=0{,}1;\ n=0{,}001;\ n=0{,}001;\ n=0{,}0001$$

א. א. וו. דעמלט וועט די ברוכצאָל האָבן אזעלכע אלץ גרעסערע באדײַטונגען:

$$\frac{m}{0{,}1}=10m\,;\quad \frac{m}{0{,}01}=100m\,;\quad \frac{m}{0{,}001}=1000m\,;\quad \frac{m}{0{,}0001}=10000m$$

א. אז. וו.

פונדאנעט זעט מען, אז אויב דער צײלער פארענדערט זיך ניט, אונ דער דײַטער דערנעענטערט זיך אומבאגרענעצט צום נול, איז פארגרעסערט זיך אומבאגרענעצט די אבסאָליוטע גרייס פונ דער ברוכצאָל $\frac{m}{n}$ (וואָס אירע גלידער מעגנ זײַנ אויכ נעגאטיווע צאָלנ). דעם דאָזיקן אומשטאנד דריקט מען קורץ אויס שריפטלעך אזוי:

$$\frac{m}{0}=\pm\infty,$$

ווו דער צייכנ ∞ דריקט אויס „אומענדלעכקײַט". די דאָזיקע פארשרײַבונג דארפ מענ ניט פארשטיינ בוכשטעבלעך, ווײַל עס איז דאָך אוממעגלעך צו טיילן אפ 0. זי באטײַט נאָר קורץ, אז די אבסאָליוטע גרייס פונ דער ברוכצאָל פארגרעסערט זיך אומבאגרענעצט (אָדער, ווי מע דריקט זיך צײַטנווײַז אויס, זי שטרעבט צו אומענדלעכקײַט), אויב דער דײַטער דערנעענטערט זיך אומבאגרענעצט צו נול, אונ דער צײלער בלײַבט אומפארענדערט; דערבײַ פארבלײַבט די ברוכצאָל גופע פאָזיטיוו, צי נעגאטיוו, אָפהענגיק דערפונ, צי האָט דער דײַטער, וואָס שטרעבט צום נול, דעם זעלביקנ צייכנ, וואָס דער צײלער, אָדער א קעגנזעצלעכנ.

130. אומענדלעכער וואָרצל.

איצטער קענענ מיר דערגענצנ דעם אויספיר, וועלכנ מיר האָבנ ארויסגעזאָגט צומ סאָפ פונ דעם פאָריקנ פאראגראפ, ד. ה., אז בא $a=0$ האָט ניט די גלײַכונג $ax=b$ קיינ וואָרצל; אויב אָבער a איז ניט גלײַך צו נול, נאָר דערנעענטערט זיך צום נול אלץ נעענטער אונ נעענטער, דעמלט

וואקסט אומבאגרענעצט די אבסאָליוטע גרייס פונ וואָרצל. קורצ דריקט מענ דאָס אויס אזוי: בא $a=0$ האָט די גלײַכונג $ax=b$ אנ אומענדלעכנ וואָרצל:

$$x=\frac{b}{0}=\pm\infty.$$

131. אומבאשטימטע לייזונג.

אויב אינ דער גלײַכונג $ax=b$ זײַנענ ביידע צאָלנ: a אונ b גלײַכ צו נול, דעמלט פארוואנדלט זיכ די גלײַכונג אינ א אידענטישקײַט:

$$0\cdot x=0,$$

וועלכע איז ריכטיק בא וועלכע עס זאָלנ ניט זײַנ באדײַטונגענ פונ x. הייסט דאָס, אינ דעמ פאל ווערט די גלײַכונג אנ אומבאשטימטע, אנדערש געזאָגט, זי דערלאָזט אומענדלעכ פיל באליביקע לייזונגענ.

אויב, ניט באמערקנדיק, אז $a=0$, וואָלטנ מיר געטיילט ביידע טיילנ אפ a, וואָלט זיכ פאר x באקומענ די ברוכצאָל $\frac{b}{a}$, וואָס בא $b=0$ אונ $a=0$ פארוואנדלט זי זיכ אינ דעמ טיילווערט $\frac{0}{0}$. לויט דער דעפיניציע פונ כילעק קענ אזא טיילווערט זײַנ גלײַכ צו יעדער באליביקער צאָל. הייסט עס, מיר וואָלטנ אויכ אינ דעמ דאָזיקנ פאל איבערצײַגט זיכ, אז די גלײַכונג דערלאָזט אומענדלעכ פיל לייזונגענ.

לאָמיר ברענגענ אנ איינפאכע אופגאבע, וואָס באמ לייזנ זי ווערט זיכ באקומענ סײַ אנ אומענדלעכע, סײַ אנ אומבאשטימטע לייזונג.

אופגאבע. וואָס פאר א צאָל דארפ מענ צוגעבנ צומ ציילער אונ צומ דײַטער פונ דער ברוכצאָל $\frac{a}{b}$, קעדיי די ברוכצאָל זאָל ווערנ גלײַכ צו דער צאָל m.

באצייכענענדיק די געזוכטע צאָל דורכ x, באקומענ מיר אזא גלײַכונג:

$$\frac{a+x}{b+x}=m,$$

פונוואנענ

$$a+x=bm+mx;$$
$$x-mx=bm-a;$$
$$(1-m)x=bm-a;$$
$$x=\frac{bm-a}{1-m}.$$

לאָמיר זיכ פאָרשטעלנ, אז $m=1$ אונ אז די דיפערענצ $b-a$ איז א באליביקע צאָל, וואָס שיידט זיכ אונטער פונ נול (א פאָזיטיווע, צי א נעגאטיווע). דעמלט באקומט זיכ פאר x די פאָרמולע:

$$x=\frac{b-a}{0}=\pm\infty$$

פונ איר קענענ מיר מאכנ אנ אויספיר, אז בא $m=1$ איז ניטאָ קיינ צאָל, וואָס זאָל באפרידיקנ די פראגע פונ דער אויפגאבע, אָבער, אויב m איז ניט איינס, נאָר דערנעענטערט זיכ צו איינס, דעמלט פארגרעסערט זיכ אומענדלעכ די אבסאָלוטע גרייס פונ x.

אויב מיר וועלנ אָננעמענ, אז בא $m=1$ איז נאָכ $a=b$, דעמלט וועט זיכ פאר x באקומענ די פאָרמולע:

$$x=\frac{0}{0},$$

פונ וועלכער מע קענ מאכנ דעמ אויספיר, אז יעדער צאָל x וועט באפרידיקנ די פראגע פונ דער אויפגאבע (אונ ווירקלעכ, די ברוכצאָל $\frac{a+x}{a+x}$ איז בא אלע באַדײַטונגענ פונ x גלײַכ צו איינס).

132. די גראפישע אויסטײַטשונג פונ דער לייזונג פונ דער גלײַכונג $ax=b$.

לאָמיר דעמ לינקנ טייל פונ דער גלײַכונג באצייכענענ מיטנ בוכשטאב y_1, אונ דעמ רעכטנ טייל מיטנ בוכשטאב y_2 אונ קאָנסטרויִרנ אפ איינ צייכענונג די גראפיקעס פונ דיביידע פונקציעס:

$$y_1=ax;\ y_2=b.$$

די גראפיק פונ דער ערשטער פונקציע איז א גראָדע, וואָס שנײַדט דורכ דעמ אָנהייב פונ די קאָאָרדינאטעס אונ דעמ פונקט $(1,a)$; די גראפיק פונ דער צווייטער פונקציע איז א גראָדע, פאראלעל צו דער x־אקס אונ וואָס שנײַדט אָפ דעמ אָפּשניט b אפ דער y־אקס. אפ דער צייכ. 31 האָבנ מיר פאָרגעשטעלט דעמ פאל, ווענ $a>0$ אונ $b>0$. מיר לייגנ פאָר די לעזער, זיי זאָלנ אלייג מאכנ די צייכענונגענ פאר די פאלנ, ווענ

$$1)\ a>0;\ b<0;$$
$$2)\ a<0;\ b>0;$$
$$3)\ a<0;\ b<0.$$

די איבערשנײַדונג פונ די צוויי גראָדע וועט באשטימענ א געוויסנ פונקט M, די אבסציסע פונ וועלכנ OA וועט זײַנ דער וואָרצל פונ דער גלײַכונג $ax=b$, ווײַל בא דער דאָזיקער אבסציסע איז די אָרדינאטע פונ דער גראָדער $y_1=ax$ גלײַכ צו דער אָרדינאטע $y_2=b$; פאָלגלעכ, $ax=b$.

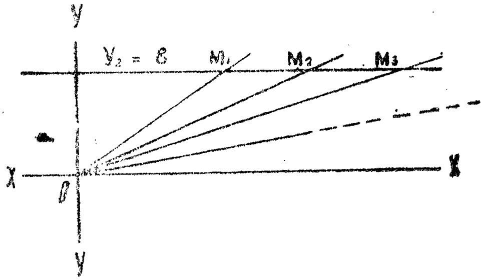
באנוצנדיק זיכ מיט אזא גראפישער פאָרשטעלונג, קענענ מיר אָנשוילעכ אויסטײַטשנ אלע פאלנ פונ לייזנ די גלײַכונג $ax=b$. לאָמיר זיכ באגרענעצנ מיט באטראכטנ צוויי פאלנ: א) אנ אומענדלעכע לייזונג; ב) אנ אומבאשטימטע לייזונג.

א) אומענדלעכע לייזונג (צייכ. 32). פארקלענערנדיק די צאָליקע באַדײַטונג פונ a, מאכנ מיר, אז די גראָדע $y_1=ax$ ווערט אלצ נעענטער צו דער x-אקס. דעמלט וועט דער פונקט M, אינ וועלכנ די גראָדע $y_2=b$ שנײַדט זיכ איבער מיט דער גראָדער $y=ax$, אלצ מער דערווײַטערנ זיכ אפ רעכטס, דורכגייענדיק דורכ דער לאגע: M_1, M_2, M_3 א. א. וו.; דערבײַ וועט די אבסציטע פונ דעמ איבערשנײַדונג-פונקט אומענדלעכ פארגרעסערנ זיכ, דורכגייענדיק דורכ די באַדײַטונגענ

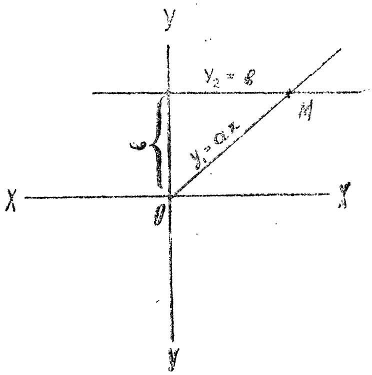
OA_1, OA_2, OA_3 א. א. וו. הייסט דאָס, ווען a פארקלענערט זיך אומבאגרענעצט, דערנענטערנדיק זיך צו 0, וואקסט אומענדלעך דער וואָרצל פון דער גלײַכונג $ax =$ [illegible], וואָס מע קען אויסדריקן אזוי:

$$x = \frac{b}{0} = \infty$$

ב) אן **אומבאשטימטע לייזונג** באקומט זיך, ווי מיר האָבן **געזען** (§ 127), בײַ $a = b = 0$. קעדיי אויסצוטײַטשן דעם דאָזיקן פאל, לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אז אויף דער צייכ. 32 פארקלענערט זיך די גרייס b, דערנענטערנדיק זיך צו 0; די גראָדע $y_2 = b$, פארבלײַבנדיק פאראלעל צו דער x־אקס, וועט



צייכ. 31.



צייכ. 32.

זיך אלץ דערנענטערן צו איר און בײַ $b = 0$ צונויפגיסן זיך מיט איר. פון דער אנדער זײַט וועט די גראָדע $y_1 = ax$ בײַ $a = 0$ פארוואנדלען זיך אין דער x־אקס. הייסט דאָס,ביידע גראָדע: $y_2 = b$ און $y_1 = ax$ וועלן זיך צונויפגיסן מיט דער x־אקס און, פאָלגלעך, יעדער פונקט פון דער דאָזיקער אקס קען מען אָננעמען פאר אן איבערשנײַדונג־פונקט, אזוי, אז די גרייס פון וואָרצל בלײַבט אומבאשטימט.

גענייטונגען.

איבערצײַגט זיך, אז די פאָלגנדיקע גלײַכונגען האָבן ניט קיין וואָרצלען (ווערן געבראכט צו אן אומענדלעכער גלײַכקײַט):

$$233.\quad \frac{5x+1}{6} + \frac{x+3}{4} = x + 1 + \frac{x-3}{12}.$$

$$234.\quad (x+2)^2 + (x-2)^2 = (x+3)^2 + (x-3)^2.$$

איבערצײַגט זיך, אז די פאָלגנדיקע גלײַכונגען דערלאָזן אן אומענדלעכע צאָל לייזונגען (פארוואנדלען זיך אין איד ענטישקײַטן).

$$235.\quad 8x + 3 = (x+2)^2 - x^2 + 4x - 1.$$

$$236.\quad (x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1).$$

237. אף דער גראָדער, וואָס גייט דורך די צענטערן 0 און $0'$ פון צוויי קרײַזליניעס מיט די ראדיוסן r און r' און מיט דעם אָפּשטאנד צווישן די צענטערן d, געפינט דעם פונקט, אין וועלכן מיט דער דאָזיקער גראָדער שנײַדט זיך איבער די געמיינזאמע אויסערלעכע באריִרנדיקע צו צוויי קרײַזליניעס. פאָרשט אויס די פארשיידענע פאלן, וואָס קענען זײַן בײַ דער לייזונג.

238. די זעלביקע אויפגאבע לייזט פאר דער אינערלעכער באריִרנדיקער.

II. די אויספאָרשונג פון א סיסטעם פון צוויי גלײַכונגען פון דער ערשטער מאדרייגע מיט צוויי אומבאוווּסטע.

133. **אלגעמיינע פאָרמולעס.** אין דעם ערשטן טייל פון אונדזער לערנבוך האָבן מיר געזען (§ 97), אז א סיסטעם פון צוויי גלײַכונגען: $ax+by=c$ און $a'x+b'y=0'$ גיט די פאָלגנדיקע פאָרמולעס פאַר די אומבאוווּסטע:

$$x=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b};\quad y=\frac{a_1c-ac_1}{a_1b-ab_1}.$$

די דײַטערס פון די פאָרמולעס קען מען מאכן גלײַך, קייפּלענדיק אין איינער פון זיי דעם ציילער און דעם דײַטער אף -1. לאָמיר, צום בײַשפּיל, קייפּלען אף -1 ביידע גלידער פון דער ברוכצאָל פאַר y, מיר באקומען:

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}.$$

איצטער האָבן ביידע פאָרמולעס דעם זעלביקן דײַטער:

$$ab_1-a_1b.$$

134. **די אויספאָרשונג.** די אויספאָרשונג פון די דאָזיקע פאָרמולעס טיילן מיר אף צוויי פאלן:

1) דער געמיינזאמער דײַטער ab_1-a_1b איז נית גלײַך צו נול.

אין דעם דאָזיקן פאל זײַנען געמאָלט פארשיידענע לייזונגען: פּאָזיטיווע, נעגאַטיווע, נוליקע. וועגן דער] באדײַטונג פון די דאָזיקע לייזונגען פאַר דער אופגאבע, וואָס פון אירע באדינגונגען איז צוזאמענגעשטעלט געוואָרן די באַטראַכטע סיסטעם, קען מען זאָגן דאָס זעלביקע, וואָס עס איז פריִער געזאָגט געוואָרן בא דער אויספאָרשונג פון איין גלײַכונג מיט איין אומבאוווּסטן.

2) דער געמיינזאמער דײַטער ab_1-a_1b איז גלײַך צו נול.

אין דעם דאָזיקן פאל קענען פאַר די אומבאוווּסטע באקומען זיך די אויסדרוקן: $\frac{m}{0}$, אָדער $\frac{0}{0}$, ווו m איז א וועלכע עס איז צאָל, וואָס איז נית גלײַך צו נול. לאָמיר באווײַזן, אז, אויב קיין איינער פון די קאָעפיציענטן: a; a_1; b; b_1 איז נית גלײַך צו נול, דעמלט קען געמאָלט זײַן איינע פון די פאָלגנדיקע צוויי האשאָרעס:

א) אויב איינער פון די אומבאוווּסטע וועט זיך פאָרשטעלן אונטער דער געשטאלט $\frac{0}{0}$, דעמלט מוז אויך דער צווייטער אומבאוווּסטער באקומען די דאָזיקע געשטאלט.

לאָמיר, צום בײַשפּיל, האָבן $x=\frac{0}{0}$; דערצו איז נייטיק, אז עס זאָלן

$$cb_1=c_1b\,;\;ab_1=a_1b.$$

קייפּלענדיק דעם לינקן טייל פון דער ערשטער גלײַכקײַט אפן רעכטן טייל פון דער צווייטער, און דעם רעכטן טייל אפן לינקן טייל פון דער צווייטער, באקומען מיר

$$cb_1a_1b=c_1bab_1,$$

פונוואנען:

$$cb_1a_1b - c_1bab_1 = 0,$$

פֿאָלגלעך:

$$bb_1(a_1c - ac_1) = 0.$$

אַזוי ווי b און b_1 זײַנען ניט גלײַך צו נול, איז די לעצטע גלײַכקײַט מעגלעך נאָר אין דעם פֿאַל, אויב

$$a_1c - ac_1 = 0;$$

אָבער, אויב אַזוי, איז $y = \frac{0}{0}$.

דאָסגלײַכן, אויב מיר וועלן זיך פֿאָרשטעלן, אַז $y = \frac{0}{0}$, ד. ה. אַז $ac_1 = a_1c$ און אַז $ab_1 = a_1b$, וועלן מיר באַקומען:

$$ac_1a_1b = a_1cab_1;$$

$$aa_1(c_1b - cb_1) = 0;$$

$$c_1b - cb_1 = 0;$$

$$x = \frac{0}{0}.$$

ב) אויב אײנער פֿון די אומבאַוווּסטע וועט באַקומען די געשטאַלט $\frac{m}{0}$ (ווו m איז אַ צאָל, ניט גלײַך צו נול), וועט דער צווייטער אומבאַוווּסטער פֿאָרשטעלן מיט זיך די געשטאַלט $\frac{n}{0}$ (ווו n איז אַ צאָל ניט גלײַך צו נול).

און ווירקלעך, אויב דער צווייטער אומבאַוווּסטער וואָלט אָנגענומען די געשטאַלט $\frac{0}{0}$, וואָלט דאָך, לויט דעם, וואָס איז פֿריִער באַוויזן, דער ערשטער אומבאַוווּסטער אויך האָבן די געשטאַלט $\frac{0}{0}$, ניט $\frac{m}{0}$.

די לייזונגען: $x = \frac{0}{0}$ און $y = \frac{0}{0}$ באַטײַטן די אומבאַשטימטקײַט פֿון דער אויפֿגאַבע. און ווירקלעך, קייפֿלענדיק אַלע גלידער פֿון דער ערשטער גלײַכונג אויף b_1, און פֿון דער צווייטער אויף b (און דאָס מעגן מיר דאָך טאָן, ווײַל b און b_1 זײַנען ניט גלײַך צו נול), באַקומען מיר:

$$ab_1x + bb_1y = cb_1$$

$$a_1bx + b_1by = c_1b \qquad (A)$$

אָבער מיר האָבן דאָך אָנגענומען, אַז

$$ab_1 = a_1b; \quad c_1b = cb_1.$$

פֿאָלגלעך, ביידע גלײַכונגען (A) שטעלן מיט זיך פֿאָר אין גרונט איין גלײַכונג מיט צוויי אומבאַוווּסטע, און אין דעם דאָזיקן פֿאַל, ווי מיר ווייסן, קענען האָבן די אומבאַוווּסטע אומענדלעך פֿיל באַדײַטונגען.

די לײזונגענ $x=\frac{m}{0}$ אונ $y=\frac{n}{0}$ באטײַטנ, אז די גלײַכונגענ זײַנענ װידער־שפרעכיק, ניט צוגעפאסט צװישנ זיכ. אונ װירקלעכ, אויב $ab_1=a_1b$, אָבער cb_1 איז ניט גלײַכ צו c_1b, איז האָבנ די לינקע טײלנ פונ דער סיסטעמ (A) גלײַכע צאָליקע גרײסנ, בײַ די רעכטע זײַנענ פארשײדנ; הײסט דאָס, די גלײַכונגענ זײַנענ װידערשפרעכיק, אונ די אויפגאבע איז אוממעגלעכ.

עס איז נוצלעכ צו באמערקנ, אז $x=\frac{0}{0}$ אונ $y=\frac{0}{0}$ קענ מענ ניט פארשטײנ אינ דעמ זינ, אז בײדע אומבאװוסטע מעג מענ געבנ באַליביקע באדײַטונגענ. אז מיר נעמענ א באַליביקע באדײַטונג פאר אײנ אומבאװוסטנ, באשטימענ מיר שױנ דערמיט דעמ צװײטנ אומבאװוסטנ, װעלכנ מע דארפ געפינענ פונ אײנער פונ די געגעבענע גלײַכונגענ.

דערפונ, װאָס איז געזאָגט געװאָרנ, מאכנ מיר דעמ אויספיר, אז, אויב קײנ אײנער פונ די פיר קאָעפיציִענטנ:

$$a,\ b,\ a_1,\ b_1$$

איז ניט גלײַכ צו נול, דעמלט דערלאָזט די סיסטעמ

$$ax+by=c$$
$$a_1x+b_1y=c_1$$

אָדער אײנ באשטימטע לײזונג, אָדער אומענדלעכ פיל לײזונגענ, אָדער גאָר קײנ לײזונגענ ניט.

באמערקונג. אויב אײניקע פונ די צאָלנ זײַנענ נולנ, איז דארפ מענ ניט פארלאָזנ זיכ אפ די אַלגעמײנע פאָרמולעס, װאָס זײַנענ ארויסגעפירט פאר די אומ־באװוסטע, נאָר אויספאָרשנ יעדער פאל באזונדער.

III. די אויספאָרשונג פונ א קװאדראט־גלײַכונג.

135. די אויספאָרשונג פונ די פאָרמולעס. די װאָרצלענ פונ א קװאד־ראט־גלײַכונג $ax^2+bx+c=0$ דריקנ זיכ אויס, װי באקאנט, דורכ די פאָר־מולעס:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

די צאָל a װעלנ מיר האלטנ פאר א פאָזיטיװער (װײַל אויב זי איז א נעגאטיװע, װאָלטנ מיר קענענ אומבײַטנ די צײכנס פאר אלע גלידער פונ דער גלײַכונג אפ קעגנזײַצלעכע; אויכ קענ מענ ניט אָננעמענ די צאָל a פאר נול, װײַל אינ דעמ פאל װאָלט די אויפגאבע אויפגעהערט צו זײַנ א קװאדראטע, זי װאָלט זיכ פארװאנדלט אינ א גלײַכונג פונ דער ערשטער מאדרײגע).

מיר האָבנ פריִער געזאָגט (§ 42), אז די װאָרצלענ פונ א קװאדראט־גלײַכונג קענענ זײַנ אָדער בײדע רעאַלע אָדער בײדע שײַנבארע אָפהענגיק דערפונ, צי װעט דער דיסקרימינאנט b^2-4ac זײַנ א פאָזיטיװע אָדער א נעגאטיװע גרײס.

לאָמיר באַטראַכטנ די דאָזיקע פראַגע אויספירלעכער:

1) אויב $b^2-4ac>0$, איז $\sqrt{b^2-4ac}$ א געוויסע פאָזיטיווע צאָל (לאָמיר געדענקענ, אז דער צייכנ $\sqrt{\ }$ באַטייַט דאָ די אריפמעטישע באַדייַטונג פונ ראַדיקאַל); פאָלגלעכ, די וואָרצלענ x_1 אונ x_2 וועלנ זייַנ רעאַלע אונ אומגלייַכע. דערבייַ קענענ זייַנ דרייַ פאַלנ:

א)ביידע וואָרצלענ זייַנענ פאָזיטיווע צאָלנ, אויב:

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}>0; \qquad -b-\sqrt{b^2-4ac}>0.$$

דערצו איז נייטיק, אז די צאָל b זאָל זייַנ א נעגאַטיווע (בא א פאָזיטיווּנ b וואָלט x_2 געווענ נעגאַטיוו), אונ אז די אבסאָלוטע גרייס פונ b זאָל זייַנ גרעסער פונ $\sqrt{b^2-4ac}$.

ב) ביידע וואָרצלענ זייַנענ נעגאַטיווע, ד. ה.

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}<0; \qquad -b-\sqrt{b^2-4ac}<0.$$

דערצו איז נייטיק, אז b זאָל זייַנ א פאָזיטיווע צאָל (בא א נעגאַטיווּנ b וואָלט דער x_1 געווּיס געווענ א פאָזיטיווער), אונ אז אויסער דעמ עס זאָל זייַנ גילטיק די אומגלייַכקייַט

$$b>\sqrt{b^2-4ac}.$$

ג) איינ וואָרצל איז א פאָזיטיווער, דער צווייטער א נעגאַטיווער; דאָס האָט אנ אָרט דעמלט, ווענ b, זייַענדיק פאָזיטיוו, צי נעגאַטיוו, איז לויט זייַנ אבסאָלוטע גרייס קלענער פונ $\sqrt{b^2-4ac}$.

2) אויב $b^2-4ac=0$, דעמלט זייַנענ די וואָרצלענ רעאַלע אונ גלייַכע:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

פאָזיטיווע צי נעגאַטיווע (אָדער גלייַכ צו נול בא $b=0$).

3) אויב $b^2-4ac<0$, דעמלט זייַנענ ביידע וואָרצלענ שייַנבאַרע (דער דאָזי-קער פאַל איז אומעגלעכ בא $c<0$).

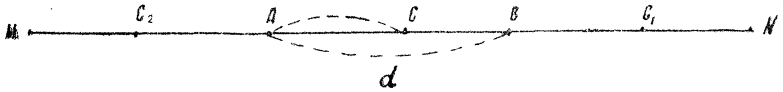
4) נוליקע לייזונגענ קענענ זיכ ארויסווייַזנ נאָר דעמלט, ווענ איינער פונ די ציילערס פונ די פאָרמולעס פאַר x_1 אונ פאַר x_2 אָדער אפילע ביידע ציילערס וועלנ זייַנ נולנ. דאָס ערשטע וועט זייַנ דעמלט, ווענ $c=0$ אונ די גלייַכונג באַ-קומט, הייסט דאָס, די געשטאַלט $ax^2+bx=0$; דאָס צווייטע וועט זייַנ דעמלט, ווענ $c=0$ אונ $b=0$, ד. ה. ווענ די גלייַכונג וועט זייַנ אזא: $ax^2=0$.

5) אנ אומענדלעכע לייזונג וואָלט זיכ קענענ באַקומענ נאָר אינ דעמ פאַל, אויב $a=0$. עמעס, דעמלט וואָלט די גלייַכונג אופגעהערט צו זייַנ א קוואַדראַטע אונ פאַרוואַנדלט זיכ אינ א גלייַכונג פונ דער ערשטער מאַדרייגע: $bx+c=0$. אויב מיר וועלנ שטעלנ די פראַגע, ווי וועלנ זיכ ענדערנ x_1 אונ x_2, ווענ a דערנענ-טערט זיכ אומבאַגרענעצט צו נול, וועלנ מיר קומענ צו אנ אויספיר, וואָס איז אנאַ-לאָגיש צו דעמ, וועלכנ מיר האָבנ געמאַכט אינ באַצוג צו א גלייַכונג פונ דער

ערשטער מאדרייגע. נעמלעך: אויב a דערנעענטערט זיך אומבאגרענעצט צו נול, ווערט איינער פון די וואָרצלען פון דער קוואדראט־גלייכונג אומענדלעך וואקסנדיק און דער צווייטער אומבאגרענעצט דערנעענטערן זיך צו $-\frac{c}{b}$.

136. די אויפגאבע וועגן צוויי קוואלן פון ליכט. כדי צו באווייזן אויף א ביישפיל די באדייטונג פון די פארשיידענע פאלן, וועלכע קענען זיין בא דער לייזונג פון א קוואדראט־גלייכונג, לאָמיר ברענגען די אויפגאבע וועגן צוויי קוואלן פון ליכט.

אויף דער גראָדער MN אין די פונקטן A און B געפינען זיך צוויי קוואלן פון ליכט. אויף אן אָפשטאנד פון איין מעטער איז די קראפט פון דעם ערשטן קוואל גלייך צו a ליכט, פון דעם צווייטן צו b ליכט. דער אָפשטאנד צווישן A און B באטרעפט d מעטער. געפינט אויף דער גראָדער MN אזא פונקט, אויף וועלכן די באלייכטונג פון ביידע קוואלן זאָל זיין גלייך (צייכ. 33).



צייכ. 33.

דער געזוכטער פונקט קען זיך געפינען אָדער צווישן A און B, אָדער צו רעכטס פון B, אָדער צו לינקס פון A. לאָמיר פאָרשטעלן זיך, אז ער געפינט זיך צווישן A און B, צום ביישפיל, אין פונקט C, וואָס שטייט אָפּ פון A אויף x מעטער. פון פיזיק איז באקאנט, אז די קראפט פון באלייכטונג בא אלע איבעריקע גלייכע באדינגונגען, איז פארקערט־פראָפּאָרציאָנעל צום קוואדראט פון דעם אָפּשטאנד פון דעם ליכט־קוואל. נעמענדיק אין באטראכט דעם דאָזיקן געזעץ, וועלן מיר באטראכטן אזוי: אויב דער פונקט C וואָלט אָפּשטיין פון A אויף 1 מעטער, דעמאָלט וואָלט ער באקומען פון אים די באלייכטונג, די גרייס ווי a ליכט. אָפּשטייענדיק אָבער ניט אויף 1 מעטער, נאָר אויף x מעטער, וועט ער האָבן פון דעם דאָזיקן קוואל די באלייכטונג: $\frac{a}{x^2}$ ליכט. דאָסגלייכן וועלן מיר געפינען, אז דער פונקט C, אָפּשטייענדיק פון דעם ליכט־קוואל B אויף $d-x$ מעטער, וועט זיך באלייכטן פונדאנען מיט דער קראפט $\frac{b}{(d-x)^2}$ ליכט. די פראגע פון דער אויפגאבע פאָדערט, אז

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2} \qquad (1)$$

פירנדיגן:

$$a(d-x)^2=bx^2,$$

ד. ה.

$$ad^2-2adx+ax^2-bx^2=0$$
$$(a-b)x^2-2adx+ad^2=0.$$

אזויווי דער קאָעפיציענט בא x טיילט זיך אפ 2, איז האָבנ מיר (ט. I, § 125.):

$$x = \frac{ad \pm \sqrt{a^2d^2 - (a-b)vd^2}}{a-b} = \frac{ad \pm d\sqrt{ab}}{a-b} =$$

$$= \frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

אזוי ארום, באקומט זיך:

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; \qquad x_2 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

מיר פאָרשנ אויס די דאָזיקע פאָרמולעס. אזויווי a און b זײַנעו פאָזיטיווע צאָלנ, קענענ ניט זײַנ אינ דער אופגאבע קײַנ שײַנבארע לייזונגענ.

1) אויב $a > b$, זײַנענ ביידע וואָרצלענ פאָזיטיווע. דערבײַ, ווײַל

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

וועט זײַנ:

$$x_2 < d \text{ און } x_1 > d$$

די צווייטע לייזונג אנטשפרעכט אונדזוער האשאָרע, אז דער געזוכטער פונקט געפינט זיך צווישנ A און B; די ערשטע לייזונג ווידערשפרעכט איר. קעדיי אָנצו־נעמענ אָדער אָפצוווארפנ די דאָזיקע לייזונג, דארפנ מיר באטראכטנ, וואָס פאר א גלײַכונג וועט זיך באקומענ, אויב מיר וועלנ זיך פאָרשטעלנ, אז דער געזוכטער פונקט געפינט זיך צו רעכטס פונ B (צום בײַשפיל, אינ C_1) אפנ אָפשטאנד x פונ A דעמלט וועט די באלײַכטונג־קראפט פונ קוואל A באטרעפנ פארנ געזוכטנ פונקט $\frac{a}{x^2}$; פונ קוואל B געפינט זיך דער פונקט C_1 אפנ אָפשטאנד $x-d$; דעריבער וועט די באלײַכטונג־קראפט פונ דעם דאָזיקנ קוואל אויסדריקנ זיך פאר אים אזוי: $\frac{b}{(x-d)^2}$

און די גלײַכונג וועט זײַנ די פאָלגנדיקע:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}. \qquad (2)$$

פארגלײַכנדיק די דאָזיקע גלײַכונג מיט דער גלײַכונג (1), געפינענ מיר, אז זיי זײַנענ גלײַך, ווײַל

$$(d-x)^2 = (x-d)^2.$$

באמערקנדיק דאָס, קענענ מיר זאָגנ, אז ביידע פאָזיטיווע לייזונגענ פונ דער גלײַכונג (1) באפרידיקנ די אופגאבע.

2) אויב $a < b$, דעמלט איז x_1 א נעגאטיווע צאָל, און x_2 איז א פאָזיטיווע, דערבײַ איז $x_2 < d$. די פאָזיטיווע לייזונג אנטשפרעכט דער האשאָרע, אז דער גע־

זוכטער פונקט געפינט זיך צווישן A און B. קעדיי קלאָר צו מאכן זיך דעם זינ פונ דער נעגאטיווער לייזונג, לאָמיר אינ דער גלײַכונג (1) פארבײַטנ x אפ $-x$:

$$\frac{a}{(-x)^2} = \frac{b}{(d+x)^2}$$

אָדער:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2} \qquad (3)$$

די גלײַכונג (3) האָט די זעלביקע ווארצלענ, וואָס די גלײַכונג (1), אָבער מיט קעגנזעצלעכע צייכנס. הייסט דאָס, די נעגאטיווע לייזונג פונ דער גלײַכונג (1) איז, לויט דער אבסאָליוטער גרייס, גלײַך צו דער פּאָזיטיווער לייזונג פונ דער גלײַכונג (3). אָבער די לעצטע אנטשפּרעכט דער זעלביקער אופגאבע, מער ניט בא אנ אנדער האשאָרע, נעמליך, אז דער געזוכטער פונקט געפינט זיך צו לינקס פונ A. צום בײַשפּיל, אז עס איז דער פונקט C_2, וואָס שטייט אָפּ, פונ A אפ x, אזוי, אז פונ A ווערט ער באלויכטנ מיט דער קראפט $\frac{a}{x_2}$ און פונ B מיט דער קראפט $\frac{b}{(d+x)_2}$, הייסט דאָס, די גלײַכונג (3) אנטשפּרעכט דער דאָזיקער האשאָרע.

אזוי ארום, באטײַט די נעגאטיווע לייזונג פונ דער גלײַכונג (1) דאָס, אז די אבסאָליוטע צאָל מעטער, וואָס איז אויסגעדריקט דורך דער פאָרמולע פאר x_1, דארפ מענ אָפּלייגנ אינ דער ריכטונג, וואָס איז קעגנזעצלעך צו יענער, וועלכע ווערט גענומענ בא א פּאָזיטיווער לייזונג.

3) אויב $a = b$, דעמלט האָבנ מיר ניט קיינ רעכט צו באנוצנ זיך מיט די פאָרמולעס, וואָס זײַנענ פריִער ארויסגעפירט פאר x_1 און x_2, ווײַל די פאָרמולעס זײַנענ באקומענ געוואָרנ בא דער האשאָרע, אז די גלײַכונג (2) איז א קוואדראטע; בא $a = b$ פארוואנדלט זי זיך אָבער אינ א גלײַכונג פונ דער ערשטער מאדרייגע:

$$-2adx + ad^2 = 0; \qquad 2x = d,$$

פאר וועלכער מיר געפינענ באלד:

$$x = \frac{d}{2}.$$

4) אויב $a = b$ און $d = 0$, פארוואנדלט זיך די גלײַכונג (2) אינ א אידענטישקײַט:

$$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 0 = 0,$$

וואָס איז ריכטיק בא אלע באדײַטונגענ פונ x. הייסט דאָס, די אופגאבע ווערט אנ אומבאשטימטע.

און,ווירקלעך. אויב צוויי קוואלנ פונ ליכט פונ גלײַכער גרייס געפינענ זיך אינ איינ אָרט ($d = 0$), וועט יעדער באליביקער פונקט גלײַך באלויכטנ ווערנ פונ ביידע.

5) אויב a איז ניט גלײַך צו b, אָבער $d = 0$, דעמלט איז

$$x_1 = x_2 = 0.$$

מע דארפ דאָס פארשטיינ אינ דעם זינ, אז אויב דער אָפּשטאנד צווישנ צוויי ניט־גלײַכע קוואלנ פונ ליכט ווערט אלץ קלענער, דערנעענטערנדיק זיך צו נול, דעמלט דערנעענטערנ זיך די צוויי גלײַך־באלויכטע פונקטנ אומבאגרענעצט צום קוואל A.

נײַנטער אָפּטייל.

I. שײַנבארע און קאָמפּלעקסע צאָלן.

137. שײַנבארע צאָלן. מיר האָבן שוין פריער געזען (ז. I, § 108), אַז דעם וואָרצל פון אַ גראָדער מאדרייגע פון אַ נעגאַטיווער צאָל איז אָנגענומען אָנצורופן אַ שײַנבארע צאָל. לאָמיר באמערקן, אַז אַזאַ וואָרצל ווערט דערפירט צו אַ קוואדראַט־וואָרצל פון אַ נעגאַטיווער צאָל; צום בײַשפּיל:

$$\sqrt[6]{-2}=\sqrt[3]{\sqrt{-2}}\,,$$

און אין אַלגעמיין

$$\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}\,.$$

דעריבער וועלן מיר ריידן נאָר וועגן אַ קוואדראַט־וואָרצל פון אַ נעגאַטיווער צאָל.

1) די שײַנבארע צאָל $\sqrt{-a}$, ווו a איז אַ באַליביקע נעגאַטיווע צאָל, שטעלט מיט זיך פאָר אַ צאָל פון אַ ספּעציפישער אַרט, וואָס איר קוואדראַט איז $-a$.

2) איבער שײַנבארע צאָלן קען מען מאכן די אַלגעבראַאישע אַקטן און אויסבילדונגען לויט די קלאָלים פאַר רעאַלע צאָלן, אָנעמענדיק אָבער, אַז שטענדיק איז

$$(\sqrt{-a})^2=-a.$$

אַ שײַנבארע צאָל פון דער געשטאַלט $\sqrt{-a}$ קען מען שטענדיק פאַרבײַטן אויף אַן אַנדערער: $\sqrt{a}\;\sqrt{-1}$. און, ווירקלעך, $\sqrt{-a}$ איז אַזאַ צאָל, פאַר וועלכער דער קוואדראַט באַטרעפט $-a$, אָבער $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ איז אויך אַזאַ צאָל, וואָס איר קוואדראַט איז $-a$, ווײַל, אָנווענדנדיק צו דער דאָזיקער צאָל דעם קלאָל פון דערהייבן אַ קייפל־פּראָדוקט אין אַ מאדרייגע, האָבן מיר:

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{-1})^2=a(-1)=-a.$$

אַזוי אַרום, איז

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

עס איז אָנגענומען צו באַצייכענען די צאָל $\sqrt{-1}$ מיט אײנעם בוכשטאַב i (דער אָנהײב־בוכשטאַב פֿון דעם פֿראַנצײזישן וואָרט imaginaire, וואָס באַטײַט: „שײַנבאַר"). אַזוי אַרום שרײַבט מען:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i\ ;\ \sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=i\sqrt{3}.$$

ברענגענדיק אַ שײַנבאַרע צאָל צו דער פֿאָרם, וואָס אַנטהאַלט דעם קײפֿלער i, שטרײַכן מיר אונטער די שײַנבאַרקײט פֿון דעם ראַדיקאַל, וואָס וואָלט עפּשער אָן דעם זײַן ניט גאָר קלאָר.

דאָס אַרײַנפֿירן אין אַלגעבּרע שײַנבאַרע צאָלן איז אַרויסגערופֿן דורך מאָטיוון, וואָס זײַנען ענלעך צו די, וואָס צוליב זײ האָט מען דערלאָזן נעגאַטיווע צאָלן: סײַ די, סײַ יענע האָבן דעם ציל צו פֿאַראַלגעמײנערן אײניקע אַלגעבּראַישע זאַצן און פֿאָרמולעס. צום בײַשפּיל, אַרײַנפֿירנדיק די שײַנבאַרע צאָל און אַנטוויקלענדיק דעם באַגריף פֿון קאָמפּלעקס־צאָל (זע פֿאָלגנדיקן פּאַראַגראַף), קענען מיר זאָגן, אַז אַ קוואַדראַט־גלײַכונג האָט שטענדיק צוויי וואָרצלען א. ד. ג. אַ באַזונדערס גרויסע באַדײַטונג האָבן די דאָזיקע צאָלן אין דער טעאָריע פֿון גלײַכונגען פֿון די העכערע מאַדרײגעס.

138. קאָמפּלעקס־צאָלן. אַ צאָל פֿון דער געשטאַלט $a+bi$ הײסט אַ **קאָמפּלעקס־צאָל**; אין איר איז a דער רעאַלער טײל און bi דער שײַנבאַרער טײל.

בײַ $a=0$ פֿאַרוואַנדלט זי זיך אין אַ רײן שײַנבאַרער צאָל

$$bi=b\sqrt{-1}=\sqrt{-b^2}\ ;$$

בײַ $b=0$ גיט זי $a+0\,i$. אַזוי ווי דער קײפֿל־פּראָדוקט $0\cdot i$ דאַרף זײַן גלײַך צו 0, דעריבער פֿאַרבלײַבט נאָר דער רעאַלער טײל a. הײסט דאָס, $a+bi$ איז די אַלגעמײנע פֿאָרם פֿון יעדער צאָל, סײַ אַ שײַנבאַרער, סײַ אַ רעאַלער, ווו a און b זײַנען באַליביקע רעאַלע צאָלן, פּאָזיטיווע, די נעגאַטיווע, צי גלײַכע צו נול, און i באַצײכנט $\sqrt{-1}$.

די קאָמפּלעקס־צאָלן פֿון דער געשטאַלט:

$$a+bi,$$
$$a-bi$$

הײסן **געפּאָרטע**; קאָמפּלעקס־צאָלן פֿון דער געשטאַלט:

$$a+bi,$$
$$-a-bi$$

הײסן **קעגנזעצלעכע**.

קעדײ אַ קאָמפּלעקס־צאָל $a+bi$ זאָל זײַן גלײַך צו נול, איז נײטיק און גענוג, אַז:

$$a=0\ ;\ b=0.$$

און ווירקלעך. אויב מיר זאָלן זיך פֿאָרשטעלן, אַז $a+bi=0$, דעמלט, מאַכנדיק איבער די גלײַכקײטן יענע אַקטן, וואָס זײַנען מעגלעך איבער גלײַכקײטן מיט רעאַלע צאָלן, און, אָננעמענדיק, אַז $i^2=-1$, וועלן מיר האָבן:

$$a=-bi;\ a^2=(-bi)^2=b^2i^2=-b^2;\ a^2+b^2=0.$$

אזויווי a^2 און b^2 זײַנען פּאָזיטיווע צאָלן, און די סומע פון צוויי פּאָזיטיווע צאָלן קען ניט באטרעפן נול, איז די ארויסגעפירטע גלײַכקײַט מעגלעך נאָר דאן ווען יעדערע פון זיי איז באזונדער גלײַך צו נול. הייסט דאָס, עס איז נייטיק, אז עס זאָלן זײַן:

$$a=0;\ b=0.$$

פאַרקערט, אויב מיר זאָלן זיך פאָרשטעלן, אז $a=0$ און $b=0$, וועלן דעמלט זײַן:

$$a+bi=0+0\cdot i.$$

אָנעמענדיק דעם קייפל אף נול און דעם כיבער מיט נול אין אזא זין, ווי פאַר רעאַלע צאָלן, דארפן מיר אויך אָנעמען, אז

$$0+0\cdot i=0.$$

אויספיר. קעדיי די צאָלן $a+bi$ און a_1+b_1i זאָלן זײַן גלײַך, איז נייטיק און גענוג, אז עס זאָל זײַן:

$$a=a_1;\ b=b_1.$$

און חירקלעך, אויב $a+bi=a_1+b_1i$, איז

$$(a-a_1)+(b-b_1)i=0.$$

און פאָלגלעך,

$$a-a_1=0,\ b-b_1=0.$$

פונדאנען:

$$a=a_1;\ b=b_1.$$

פאַרקערט, אויב $a=a_1$ און $b=b_1$, דארפן מיר אָנעמען, אז די צאָל $a+bi$ איז גלײַך צו a_1+b_1i, ווײַל אין דעם דאָזיקן פאל שיידן זיך ניט אונטער ביידע קאָמפּלעקס־צאָלן מיט קיין זאך איינע פון דער צווייטער.

באמערקונג. אין באצוג צו די קאָמפּלעקס־צאָלן איז ניטאָ קיין פאַרשטענדיקונג, וועלכע מע זאָל אָנעמען פאַר גרעסער פון דער צווייטער.

139. די אקטן איבער קאָמפּלעקס־צאָלן.

קעדיי צו מאכן וועלכע עס איז אקטן איבער שײַנבארע צאָלן, דארף מען פריִער פון אלץ ברענגען יעדערע פון זיי צו דער פאָרם פון א קאָמפּלעקס־צאָל $a+bi$ און דערנאָך מאכן איבער די צוויי־גלידער פון אזא געשטאַלט די אקטן לויט די קלאָלים, וואָס מיר האָבן ארויסגעפירט פאַר צווייגלידער מיט רעאַלע גלידער (לויט דער צווייטער באדינגונג פון § 11) און ענדלעך, פאַרבײַטן i^2 אף -1 (לויט דער ערשטער באדינגונג פון § 11).

כיבער.

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i.$$

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)i.$$

פונדאנען איז לײַכט צו זען, אז די סומע פון קאָמפּלעקס־צאָלן פאַרמאָגט די זעלביקע אייגנשאפטן, וואָס די סומע פון רעאַלע צאָלן, ד. ה. די אייגנשאפטן פון איבערשטעלונג און קאָמבינירונג.

כיסער.

$$(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)i.$$

לאָמיר באמערקנ, אז די סומע אָדער די דיפערענצ פונ צוויי קאָמפּלעקס־צאָלנ קענ זיכ אמאָל ארויסווײַזנ א רעאלע צאָל; צומ בײַשפּיל, די סומע פונ גקפּאָרטע קאָמפּלעקס־צאָלנ:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

קייפל.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$$
$$(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i.$$

אפ אזא אויפנ קענ מענ צוזאמענשטעלנ דעמ קייפל־פּראָדוקט פונ דרײַ אָדער ־נ מער קאָמפּלעקס־צאָלנ.

לאָמיר באמערקנ, אז דער קייפל־פּראָדוקט פונ צוויי געפּאָרטע קאָמפּלעקס־צאָלנ

$$(a+bi)(a-bi)$$

איז גלײַכ צו (a^2+b^2), וואָס איז א פּאָזיטיווע רעאלע צאָל. אונ ווירקלעכ:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2.$$

אָבער $i^2=1$. הייסט עס:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

ביילעק.

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{(aa_1+bb_1)+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i.$$

דערהייבנ אינ א מאדרייגע. לאָמיר פריִער געפינענ די רעזולטאטנ פונ דערהייבנ אינ א מאדרייגע די שײַנבארע צאָל i, וויסנדיק שוינ, לויט דער באדינגונג, אז i^2 איז גלײַכ צו -1.

$$i^1=i;\; i^2=-1;\; i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i;\; i^4=i^3\cdot i=-i^2=+1;$$
$$i^5=i^4\cdot i=(+1)\cdot i=i;\;\; i^6=i^5\cdot i=i^2=-1;\;\; i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$

א. א. וו.

מיר באקומענ, אזוי ארומ, פיר באדײַטונגענ, וואָס בײַטנ זיכ אינ דער ריי:

$$i;\; -1;\; -i;\; +1.$$

לאָמיר נאָכ באמערקנ, אז i^0 נעמט מענ אָנ פאר גלײַכ צו 1.

איצטער איז שוינ לײַכט צו געפינענ די רעזולטאטנ פונ דערהייבנ $a+bi$ אינ א מאדרייגע מיט א גאנצנ פּאָזיטיוונ ווײַזער:

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi;$$
$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

אַרױסציִונג פֿון אַ קװאַדראַט־װאָרצל. לאָמיר זיך פֿאָרשטעלן, אַז

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

אױב אַזױ, האָבן מיר:

$$a+bi=(x^2-v^2)+2xyi.$$

הײסט עס:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=a \\ 2xy&=b \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

די פֿראַגע װערט געבראַכט צו געפֿינען די רעאַלע װאָרצלען פֿון דער דאָזיקער סיסטעם. דערהײבנדיק בײדע גלײַכונגען אין אַ קװאַדראַט און צונױפֿלײגנדיק זײ, באַקומען מיר:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2;\quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(דער צײכן מינוס פֿאַרן ראַדיקאַל איז אָפּגעװאָרפֿן, װײַל בײַ רעאַלע באַדײַטונגען פֿון x און y קען ניט x^2+y^2 זײַן נעגאַטיװ). מיר װעלן נעמען די לעצטע גלײַכונג צוזאַמען מיט דער ערשטער גלײַכונג פֿון דער סיסטעם (1). אַז מיר לײגן זײ צונױף און נעמען דערנאָך אָרױס, באַקומען מיר:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2};\qquad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2};\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

פֿון דער צװײטער גלײַכונג פֿון דער סיסטעם (1) זעען מיר, אַז די צײכנס פֿון x און y דאַרפֿן זײַן גלײַך, אױב $b>0$, און פֿאַרשײדענע, אױב $b<0$. דעריבער:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]\ \text{בײַ}\ b>0.$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]\ \text{בײַ}\ b<0.$$

בײַשפּילן.

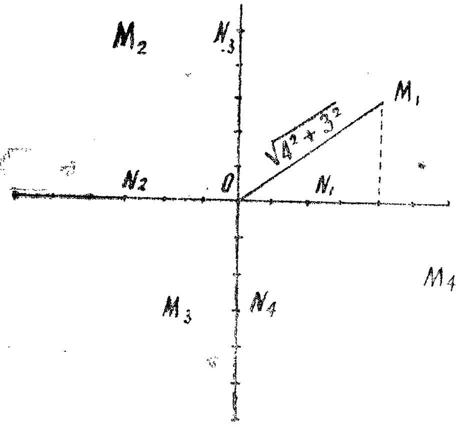
1) $$\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+\right.$$

$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=$$

$$=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=\pm(3+2i).$$

$$2)\ \sqrt{-1}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$
$$3)\ \sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-\right.$$
$$\left.-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

באמערקונג. קעדיי צו קענען ארויסציִען פון א קאָמפּלעקס־צאָל דעם וואָרצל פון דער דריטער אָדער פון נאָך א העכערער מאדרייגע, דארף מען איר צונעבן אן אנדער געשטאלט (א טריגאָנאָמעטרישע), וועגן וואָס מיר וועלן דאָ ניט ריידן.



צייכ. 34.

140. געאָמעטרישע פאָרשטעלונג פון א קאָמפּלעקס־צאָל.

יעדער קאָמפּלעקס־צאָל $a+bi$ קען פאָרגעשטעלט ווערן געאָמעטריש.

לאָמיר נעמען אף א פלאך א גראַד־ווינקלדיקע סיסטעם קאָאָרדינאטן, אויסקלײַבן א לענג־איינס און אָפּלייגן די רעאלע צאָלן אף דער x־אקס, די שײַנבארע אף דער y־אקס. אנטשפּרעכיק דערצו, הייסט די x־אקס די רעאלע אקס, און די y־אקס די שײַנבארע. אזוי, צום בײַשפּיל (צייכ. 34),

וועט דער פונקט N_1 פאָרשטעלן די צאָל $+2$
״ ״ ״ N_2 ״ ״ ״ -3
״ ״ ״ N_3 ״ ״ ״ $+5i$
״ ״ ״ N_4 ״ ״ ״ $-3i$

דער צאָל $a+bi$ וועט אנטשפּרעכן אזא פונקט פון דער פלאך, וואָס זײַן אבסציסע איז צאָליק גלײַך צו a, און די אָרדינאטע צו b. צום בײַשפּיל,

דער פונקט M_1 שטעלט פאָר די צאָל $4+5i$
״ ״ M_2 ״ ״ ״ $-3+4i$
״ ״ M_3 ״ ״ ״ $-1-3i$
״ ״ M_4 ״ ״ ״ $5-2i$
״ O ״ ״ ״ $O+Oi$

קלאָר, אז בא די געגעבענע קאָאָרדינאטע אקסן און בא דעם געגעבענעם לענג־איינס אנטשפּרעכט יעדן פונקט פון דער פלאך איין און בלויז איין קאָמפּלעקס־צאָל

(אין א ספּעציפֿישן פֿאַל איז זי א רעאַלע אָדער א שײַנבאַרע). און, פֿאַרקערט, יע־ דער קאָמפּלעקס־צאָל אַנטשפּרעכט איין פּונקט און בלויז איין פּונקט פֿון דער פֿלאַך. אַף אַזא אופֿן, פּונקט ווי יעדער רעאַלע צאָל (סײַ א פּאָזיטיווע, סײַ א נעגאַטיווע) קען געאָמעטריש פֿאָרגעשטעלט ווערן אַף א גראָדער ליניע (דער צאָל־אַקס), אַזוי קען יעדער קאָמפּלעקס־צאָל געאָמעטריש פֿאָרגעשטעלט ווערן מיט דער הילף פֿון פּונקטן אַף א פֿלאַך.

לאָמיר באַמערקן, אַז דער אָפּשטאַנד פֿון אָנהייב קאָאָרדינאַטן ביזן פּונקט, וואָס שטעלט פֿאָר די געגעבענע קאָמפּלעקס־צאָל $a+bi$ (ד. ה. דער אָפּשניט OM_1 פֿאַרן פּונקט M_1, דער אָפּשניט OM_2 פֿאַרן פּונקט M_2 א. ד. ג. (צייכ 34), איז די הי־ פּאָטענוזע פֿון א גראָדווינקלדיקן דרײַעק, בא וועלכן איין קאַטעט איז a, דער צוויי־ טער—b. הייסט עס, דער דאָזיקער אָפּשטאַנד דריקט זיך אויס צאָליק אַזוי: $\sqrt{a^2+b^2}$. די דאָזיקע גרייס הייסט דער מאָדול פֿון דער קאָמפּלעקס־צאָל $a+bi$. בא וואָסערע עס זאָל ניט זײַן באַדײַטונגען פֿון a און b איז דער מאָדול א פּאָזי־ טיווע צאָל.

די געאָמעטרישע פֿאָרשטעלונג פֿון קאָמפּלעקס־צאָלן שפּילט א גרויסע ראָל אין איינציקע אָפּטיילן פֿון דער העכערער מאַטעמאַטיק.

געניטונגען.

239. קאָנטראָלירט דורך די ריכטיקייט פֿון דער גלײַכקייט:

$$i^7+i^{18}+i^{25}+i^{35}+i^{97}+i^{100}=0$$

רעכנט אויס די אויסדרוקן:

240. $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$. 241. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

242. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$.

קאָנטראָלירט דורך, דערהייבנדיק אין קוואַדראַט אָדער אין קוב די פֿאָלגנדיקע גלײַכקײַטן:

מאַכט די פֿאָלגנדיקע אַקטן:

243. $\sqrt{2i}+\sqrt{-2i}=2$. 244. $\sqrt[3]{i}=-i$.

245. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$.

246. $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib}-\dfrac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

פֿאַרייִנפֿאַכט די אויסדרוקן:

247. $\dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}$; 248. $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$.

249. באַצייכענענדיק צוליב קורצקײַט:

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha_1;\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha_2;\ 1=\alpha_3,$$

קאָנטראָלירט דורך די גלײַכקײַטן:

1) $\alpha_1^3=\alpha_2^3=\alpha_3^3=1$. 2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

3) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3=1$. 4) $\alpha_1^2=\alpha_2$.

5) $\alpha_2^2=\alpha_1$. 6) $1+\alpha_1+\alpha_1^2=0$.

צענטער אָפּטייל.

אייניקע ידיעות וועגן אַלגעבראַישע גלײַכונגען.

1. טיילבאַרקײַט פֿון אַ פּילגליד.

141. בעזוס טעאָרעמע. די טיילבאַרקײַט פֿון אַ פּילגליד אַ גאַנצן אין באַצוג צו x, אויף דער דיפֿערענץ $x-a$.

טעאָרעמע. אַ פּילגליד, אַ גאַנצער אין באַצוג צו x (און אַן אויסגעשטעלטער לויט די פֿאַלנדיקע מאַדרייגעס פֿון דעם דאָזיקן בוכשטאַב):

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K,$$

גיט באַם טיילן אויף דער דיפֿערענץ $x-a$ (וווּ a איז אַ באַליביקע צאָל, אַ פּאָזיטיווע אָדער נעגאַטיווע) אַ רעשט

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

וועלכער איז גלײַך צו יענעם באַדײַט פֿון דער פּילעקצאָל, וועלכן זי באַקומט באַ $x=a$.

באַווײַז. פֿונעם פּראָצעס פֿון טיילן דעם פּילגליד, וואָס איז אויסגעשטעלט לויט די פֿאַלנדיקע מאַדרייגעס פֿונעם בוכשטאַב x, זעט מען, אַז די טיילונג פֿון אַזאַ פּילגליד אויף $x-a$ קאָן מען פֿאָרזעצן אַזוי לאַנג, ביז וואַנען דער העכסטער גליד פֿונעם רעשט R אַנטהאַלט ניט מער אין זיך דעם בוכשטאַב x. לאָמיר זאָגן, אַז דערבײַ וועט דער טיילוועָרט זײַן אַ געוויסער פּילגליד Q. דעמלט קאָנען מיר אויפֿשרײַבן די גלײַכקײַט:

$$M = (x-a)Q + R.$$

די דאָזיקע גלײַכקײַט איז אַ אידענטישקײַט, ד. ה. זי איז ריכטיק באַ אַלע מעגלעכע באַדײַטונגען פֿון בוכשטאַב x, און דעריבער מוז זי אויך זײַן ריכטיק באַ $x=a$. אָבער באַ $x=a$ גיט זי:

$$M' = (a-a)Q' + R,$$

אויב מיר באַצייכענען מיט די בוכשטאַבן M' און Q' יענע באַטרעפֿן פֿון M און Q, וועלכע די דאָזיקע פּילגלידער נעמען אָן באַ $x=a$ (דער רעשט R, אַלס אַזעלכער,

וואָס אנטהאלט אינגאנצן ניט קיין x, ענדערט זיך ניט פון אונטערשטעלן a אָנשטאָט x). אזוי ווי

$$a - a = Q,$$

איז אויך דער קייפל-פּראָדוקט

$$(a - a)\, Q$$

גלייך צו O; הייסט דאָס, אז די לעצטע גלייכקייט גיט: $M' = R$, ד. ה.

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

וואָס עס האָט זיך געפאָדערט צו דערווייזן.

1-טער אויספיר. אזוי ווי

$$x + a = x - (-a),$$

געפינען מיר, אָנווענדנדיק די דערוויזענע טעאָרעמע צו דער סומע $x + a$, אז דער פילגליד

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

גיט באם טיילן אפ דער סומע $x + a$ אינעם רעשט א צאָל, וואָס איז גלייך צו

$$A(-a)^m + B(-a)^{m-1} + \ldots + K,$$

ד. ה. א צאָל, וואָס איז גלייך צו יענעם באדייט פון דער פילעקצאָל, וועלכן זי באקומט בא $x = -a$.

ביישפילן. 1) דער פילגליד

$$x^5 - 3x^2 + 5x - 1$$

גיט באם טיילן אפ

$$x - 2$$

א רעשט, וואָס איז גלייך צו

$$2^5 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 29.$$

2) דער פילגליד

$$x^5 - 3x^2 + 5x - 1$$

גיט באם טיילן אפ $x + 2$ א רעשט

$$(-2)^5 - 3(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -55.$$

2-טער אויספיר. קעדיי דער פילגליד

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

זאָל זיך טיילן אפ דער דיפערענץ $x - a$,

איז נייטיק און גענוג, אז ער זאָל זיך בא $x = a$ פארוואנדלען אין 0.

דאָס איז נייטיק, ווייל אויב דער אָנגעוויזענער פילגליד טיילט זיך אפ $x - a$, מוז דער רעשט פונעם פילעק זיין א נול, און, לויט ווי עס איז פריער דערווייזן

געוואָרן, איז דער דאָזיקער רעשט יענער באַטרעף פון דער כּילעקצאָל, וועלכן זי נעמט אָן בײַ $x=a$. דאָס איז גענוג, ווײַל אויב דער פּילגליד ווערט פאַרוואַנדלט אין נול בײַ $x=a$, הייסט דאָס, אַז דער רעשט פון טיילן דעם דאָזיקן פּילגליד אַף $x-a$ איז גלײַך צו נול.

3-טער אויספיר. קעדיי דער פּילגליד.

$$Ax^m+Bx^{m-1}+...+K$$

זאָל זיך טיילן אַף דער סומע $x+a$, איז נייטיק און גענוג, אַז בײַ $x=-a$ זאָל ער זיך פאַרוואַנדלען אין 0, ווײַל די סומע $x+a$ איז די דיפערענץ פון $(-a)$ — $x-(-a)$.

בײַשפּילן. 1) דער פּילגליד

$$x^3-4x^2+9$$

טיילט זיך אַף $x-3$,

ווײַל $3^3-4\cdot 3^2+9=0$

2) דער פּילגליד

$$2x^2+x-45$$

טיילט זיך אַף $x+5$, ווײַל

$$2(-5)^2+(-5)-45=0.$$

142. די טיילבאַרקייט פונעם צווייגליד $x^m \mp a^m$ אַף $x \mp a$.

1) די דיפערענץ פון גלײַכע מאַדרייגעס פון צוויי צאָלן טיילט זיך אַף דער דיפערענץ פון די דאָזיקע צאָלן, ווײַל

$$x^m-a^m$$

גיט בײַם טיילן אַף

$$x-a$$

אַ אינעם רעשט

$$a^m-a^m,$$

ד. ה. 0.

2) די סומע פון גלײַכע מאַדרייגעס פון צוויי צאָלן טיילט זיך ניט אַף דער דיפערענץ פון די דאָזיקע צאָלן, ווײַל

$$x^m+a^m$$

גיט בײַם טיילן אַף

$$x-a$$

אַ רעשט

$$a^m+a^m=2a^m,$$

און ניט קיין 0.

3) די דיפערענצ פונ גלײַכע גראָדע מאדרייגעס פונ צוויי צאָלנ טיילט זיכ, אונ פונ אומגראָדע טיילט זיכ ניט אפ דער סומע פונ די דאָזיקע צאָלנ, ווײַל באמ טיילנ די דיפערענצ

$$x^m - a^m$$

אפ $x+a$ איז דער רעשט גלײַכ צו

$$(-a)^m - a^m,$$

אונ דאָס איז בא א גראָדנ m גלײַכ צו נול, אונ בא אנ אומגראָדנ m טרעפט דאָס אָנ $-2a^m$.

4) די סומע פונ גלײַכע אומגראָדע מאדרייגעס פונ צוויי צאָלנ טיילט זיכ, אונ פונ גראָדע טיילט זיכ ניט אפ דער סומע פונ די דאָזיקע צאָלנ, ווײַל באמ טיילנ די סומע

$$x^m + a^m$$

אפ $x+a$ איז דער רעשט גלײַכ צו

$$(-a)^m + a^m,$$

וואָס בא אנ אומגראָדנ m איז עס גלײַכ צו 0, אונ בא א גראָדנ m טרעפט דאָס אָנ $2a^m$.

ב ײַ ש פּ י ל נ.

1) $x^1 + a^1$ טיילט זיכ אפ $x+a$, טיילט זיכ אָבער ניט אפ $x-a$.

2) $x^2 - a^2$ טיילט זיכ סײַ אפ $x-a$ אונ סײַ אפ $x+a$.

3) $x^2 + a^2$ טיילט זיכ ניט, ניט אפ $x-a$ אונ ניט אפ $x+a$.

4) $x^3 - a^3$ טיילט זיכ אפ $x-a$, אָבער ניט אפ $x+a$.

5) $x^3 + a^3$ טיילט זיכ אפ $x+a$, אָבער טיילט זיכ ניט אפ $x-a$.

143. טיילווערטנ, וואָס ווערנ באַקומענ באמ טיילנ $x^m \mp a^m$ אפ $x \mp a$

באמ טיילנ $x^m - a^m$ אפ $x-a$ האָבנ מיר דעמ טיילווערט:

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$$

אונ די רעשטנ:

1-טער רעשט:

$$ax^{m-1} - a^m;$$

2-טער רעשט:

$$a^2x^{m-2} - a^m;$$

3-טער רעשט:

$$a^3x^{m-3} - a^m\ldots$$

m-טער רעשט:

$$a^mx^{m-m} - a^m = a^m - a^m = 0.$$

מיר באמערקנ, אז דער פּילגליד, וואָס האָט זיך באַקומענ אינעם טיילווערט, אנטהאלט m גלידער; די סומע פונ די וויַזערס אינ יעדנ גליד בא a אונ x איז די זעלביקע, נעמלעכ $m-1$;

די וויַזערס פונ x גייענ, פאַרקלענערנדיק זיכ אפ 1, פונ

$$m-1$$

ביז 0, די וויַזערס פונ a ווידער גייענ, פאַרגרעסערנדיק זיכ אפ 1, פונ 0 ביז

$$m-1;$$

די קאָעפיציִענטנ זיַינענ בא אלע גלידער גליַיכ צו 1; די צייכנס זיַינענ אלע $+$; די צאָל גלידער אינעם טיילווערט איז m.

באמערקנדיק דאָס, קאָנ מענ דירעקט שריַיבנ:

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2);$$
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3);$$
$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$$

א. א. וו.

קעדיי צו באַקומענ דעם טיילווערט פונ טיילנ x^m-a^m אפ $x+a$ בא א גראָדנ m אָדער פונ טיילנ x^m+a^m אפ $x+a$ בא אנ אומגראָדנ m, איז גענוג אינ דעם אויבנ באַקומענעם טיילווערט צו פאַרבייַטנ דעם a אפ $-a$.

אפ אזא אויפנ איז:

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2);$$
$$x^4-a^4=(x+a)(x^3-ax^2+a^2x=a^3);$$
$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)$$

א. א. וו.

געניטונגענ:

250. געפינט די רעשטנ פונ טיילנ דעם פּילגליד

$$x^4-3x^3-5x^2+20x-8$$

אפ $x-1$; אפ $x+1$; אפ $x-2$; אפ $x+2$; אפ $x-3$; אפ $x+3$.

251. באַשטימט די צאָלגרייס פונ a אינעם פּילגליד:

$$x^4+3x^3+4x^2+ax+11,$$

אז ער זאָל זיכ טיילנ אָנ א רעשט אפ $x+1$.

144. אלגעמיינע פאָרמ פונ אנ אלגעבראִישער גליַיכונג. פריִער האָבנ מיר געזענ, אז א גליַיכונג, וואָס אנטהאלט אנ אומבאַוווּסטע אינ די דיַיטערס, קאָנ געבראַכט ווערנ צו א גאַנצער פאָרמ. וויַיטער וועלנ מיר, אז א גליַיכונג, וואָס האָט אנ אומבאַוווּסטע אונטער א ראדיקאל־צייכנ, קאָנ געבראַכט ווערנ צו א ראַציִאָנעלער פאָרמ. צוליב דעם קאָנענ מיר זאָגנ, אז יעטווידער גליַיכונג, אינ וועלכער די אומבאַוווּסטע איז פאַרבונדנ מיט די געגעבענע צאָלנ דורכ דער ענדלעכער צאָל

פון די זעקס אַלגעבראַיִשע רעכנאַקטן (כיבער, כיסער, קייפל, כילעק, מאַדרייגע־דערהייבונג און וואָרצל־אַרויסציִונג [1]), קאָן דערפירט ווערן צו אַזאַ גאַנצער און ראַציִאָנעלער פאָרם:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

וווּ די קאָעפיציִענטן

$$A,\ B,\ C \ldots\ K \text{ און } L$$

זײַנען שטענדיקע רעאַלע אָדער קאָמפּלעקסע צאָלן, און דער m איז דער מאַדרייגע־ווײַזער פון דער גלײַכונג. אייניקע קאָעפיציִענטן קאָנען אין באַזונדערע פאַלן זײַן גלײַך צו 0.

א גלײַכונג פון אַזאַ פאָרם ווערט אָנגערופן *אַלגעבראַיִשע*. אַלגעבראַיִשע גלײַכונגען פון אַ העכערער מאַדרייגע, איידער פון דער צווייטער, ווערן אָנגערופן גלײַכונגען פון העכערע מאַדרייגעס.

145. אייניקע אייגנשאַפטן פון אַן אַלגעבראַיִשער גלײַכונג. די גלײַכונגען פון העכערע מאַדרייגעס—דאָס איז דער געגנשטאַנד פון דער העכערער אַלגעבערע. די עלעמענטאַרע אַלגעבערע באַטראַכט בלויז אייניקע טיילווײַזע פאַלן פון די דאָזיקע גלײַכונגען.

די העכערע אַלגעבערע שטעלט פעסט פאָלגנדיקן וויכטיקן עמעס: יעטווידער אַלגעבראַיִשע גלײַכונג מיט רעאַלע קאָעפיציִענטן האָט אַ רעאַלן אָדער אַ קאָמפּלעקס־וואָרצל (גאַוסעס טעאָרעמע [2]) (1799).

דערלאָזנדיק דעם דאָזיקן עמעס (וואָס דערווײַזן אים אין דער עלעמענטאַרער אַלגעבערע וואָלט געווען שווערלעך), איז ניט שווער צו באַווײַזן, אַז אַן אַלגעבראַיִשע גלײַכונג האָט אַזויפיל וואָרצלען, רעאַלע אָדער קאָמפּלעקסע, וויפל איינסן עס איז פאַראַן אינעם ווײַזער פון איר מאַדרייגע.

און טאַקע, לויט גאַוסעס טעאָרעמע, האָט די גלײַכונג:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0 \qquad (1)$$

אַ רעאַלן אָדער אַ קאָמפּלעקסן וואָרצל; לאָמיר אָנעמען, אַז דער דאָזיקער וואָרצל איז α. דעמאָלט מוז דער פילגליד, וואָס שטייט אינעם לינקן טייל פון דער גלײַכונג (1), זיך טיילן אָפּ

$$x - \alpha \quad (\S\ 125).$$

אויב מיר מאַכן דעם כילעק, באַקומען מיר אינעם טיילוועדט אַ פילגליד פון דער מאַדרייגע $m-1$, וווּ דער ערשטער קאָעפיציִענט וועט זײַן A. באַצייכענענדיק די איבעריקע קאָעפיציִענטן זײַנע אַנטשפּרעכנדיק מיט די בוכשטאַבן

$$B_1,\ C_1 \ldots\ K_1$$

[1] האַלטנדיק, אַז באַם אויפהייבן אין אַ מאַדרייגע און באַם אַרויסציִען אַ וואָרצל גייט די אומבאַוווסטע ניט אַרײַן ניט אינעם מאַדרייגע־ווײַזער און ניט אינעם וואָרצל־ווײַזער.

[2] קאַרל פרידריך גאַוס—באַרימטער דײַטשישער מאַטעמאַטיקער (1777—1855).

און נעמענדיק אינ אכט, אז די כּילעקצאָל איז גלײַך צום טײלער, געקײפּלט אפּנ טײלווערט, קאָנענ מיר פאָרשטעלנ די גלײַכונג (1) אזוי:

$$(x-\alpha)(Ax^{m-1}+B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}+\ldots+K_1)=0. \qquad (2)$$

פאַרגלײַכנדיק צו נול דעמ פּילגליד, וואָס שטײט אינ די צווײטע קלאַמערנ, באַקומענ מיר א נײַע גלײַכונג, וועלכע דאַרפ לויט דער זעלביקער טעאָרעמע האָבנ א געוויסנ וואָרצל β; צוליב דעמ קאָנ דער לינקער טײל אירער צעגלידערט ווערנ אפּ צווײ קײפּלער: $x-\beta$ און דעמ פּילגליד פונ דער מאדרײגע $m-2$, בא וועלכנ דער ערשטער קאָעפיציענט וועט ווי פריִער זײַנ A. דעריבער קאָנ מענ די גלײַכונג (1) איבערשרײַבנ אזוי:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(Ax^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots)=0. \qquad (3)$$

פאָרזעצנדיק די דאָזיקע באהאנדלונג ווײַטער, דערגײענ מיר, ענדלעכ, צו דעמ, אז דער פּילגליד, וואָס איז אײַנגעשלאָסנ אינ די לעצטע קלאַמערנ, וועט זײַנ פונ דער צווײטער מאדרײגע, דערבײַ וועט דער ערשטער קאָעפיציענט זײַנער בלײַבנ A. צעגלידערנדיק דעמ דאָזיקנ דרײַגליד אפּ קײפּלערס (§ 47), דערפירנ מיר די גלײַכונג (1) ענדגילטיק צו דער פאָרמ:

$$A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0, \qquad (4)$$

ווו די צאָל דיפערענצנ:

$$x-a,\ x-\beta\ldots$$

וועט זײַנ m. קלאָר, אז די גלײַכונג (4) פארוואנדלט זיכ אינ א אידענטישקײט בא יעדערער פונ די באדײַטונגענ:

$$x=\alpha,\ x=\beta,\ x=\gamma\ldots\ x=\lambda$$

און באפרידיקט זיכ ניט מיט קײנשום אנדערע באדײַטונגענ פונ x (אויב $A\neq 0$). הײסט דאָס, אז די גלײַכונג (1) האָט m וואָרצלענ

$$a,\ \beta,\ \gamma\ldots\lambda.$$

אינ באזונדערע פאלנ קאָנענ אײניקע און אפילע אלע וואָרצלענ זײַנ גלײַכ.

עס איז נוצלעכ צו באמערקנ נאָכ פאָלגנדיקע עמעסנ, וואָס ווערנ דערוויזנ אינ דער העכערער אלגעברע.

די סומע פונ די וואָרצלענ פונ יעטווידער אלגעבראִישער גלײַכונג

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Kx+L=0$$

איז גלײַכ צו $-\frac{B}{A}$, און דער קײפּל־פּראָדוקט פונ די וואָרצלענ איז גלײַכ צו $\frac{L}{A}$ (אלס בײַשפּיל קאָנ דינענ די קוואדראטע גלײַכונג).

אויב אנ אלגעבראִישע גלײַכונג מיט רעאלע קאָעפיציִענטנ האָט קאָמפּלעקסע וואָרצלענ, איז די צאָל פונ די דאָזיקע וואָרצלענ א גראָדע (אלס בײַשפּיל קאָנ דינענ די ביקוואדראטע גלײַכונג).

אויב אנ אלגעבראַישע גלײַכונג מיט רעאלע קאָעפיציענטנ האָט n וואָרצלענ פונ דער פאָרמ $p+qi$, האָט זי נאָכ n וואָרצלענ פונ דער פאָרמ $p-qi$ (אלס בײַשפּיל קאָנ דינענ די ביקוואדראטע גלײַכונג, וואָס די קאָמפּלעקסטע וואָרצלענ אירע זײַנענ שטענדיק צונויפגעפּאָרטע), אונ אזויווי

$$[x-(p+qi)]\,[x-(p-qi)]=[(x-p)-qi]\,[(x-p)+qi]=$$
$$=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2),$$

אנטהאלט דער לינקער טײל פונ דער גלײַכונג אינ דעמ דאָזיקנ פאל n רעאלע קײפלערס פונ דער פאָרמ

$$ax^2+bx+c.$$

אנ אלגעבראַישע גלײַכונג פונ אנ אומגראָדער מאדרײגע מיט רעאלע קאָעפיציענטנ האָט, צומ װײניקסטנ, אײנ רעאלנ וואָרצל.

גלײַכונגענ מיט באליביקע בוכשטאביקע קאָעפיציענטנ פונ א מאדרײגע ניט העכער פונ דער פערטער ווערנ געלײזט אלגעבראַיש, ד. ה. פאר די וואָרצלענ פונ די דאָזיקע גלײַכונגענ זײַנענ געפונענ געוואָרנ אלגעמײנע פאָרמולעס, צונויפגעשטעלט פונ די קאָעפיציענטנ פונ דער גלײַכונג מיט דער הילפ פונ אלגעבראַישע רעכנאקטנ.

אינ דעמ זינ קאָנענ קײנ גלײַכונגענ מיט באליביקע בוכשטאביקע קאָעפיציענטנ העכער פונ דער פערטער מאדרײגע ניט געלײזט ווערנ אלגעבראַיש (אבעלס[1] טעאָרעמע); אָבער ווענ די קאָעפיציענטנ פונ א גלײַכונג פונ א באליביקער מאדרײגע זײַנענ אויסגעדריקט אינ צאָלנ, איז שטענדיק פאראנ א מעגלעכקײַט אויסצורעכענענ מיט דעמ געוווּנטשענעמ גראד דערנעענטערונג אלע אירע וואָרצלענ, סײַ די רעאלע אונ סײַ די שײַנבארע. אָנווײַזנ די מיטלענ פונ אזא אויסרעכענונג—דאָס איז א וויכטיקער טײל פונ דער העכערער אלגעברע.

[1] גאָרוועגישער מאטעמאטיקער פונ אָנהײב XIX י. ה. (1802—1829)

עלפטער אָפּטייל.

I אומבאשטימטע גלײַכונגען.

146. ארײַנפיר-באמערקונגען. באם דערלערנען די גלײַכונגען פון ערשטער מאדרייגע האָבן מיר שוין געזען, אז אויב די צאָל גלײַכונגען איז קלענער פון דער צאָל אומבאוווסטע, האָט אזא סיסטעם אן אומבאגרענעצטע צאָל לייזונגען. אזוינע גלײַכונגען ווערן אָנגערופן אומבאשטימטע.

אָפטער פון אַלץ טרעפט זיך אין דער פראקטיק דער פאל פון איין גלײַכונג מיט צוויי אומבאשטימטע. די אלגעמיינע פאָרם פון אזא גלײַכונג איז:

$$ax + by = c,$$

וווּ x און y זײַנען אומבאוווסטע, און a, b און c זײַנען די געגעבענע קאָעפיציענטן.

אָפטמאָל זײַנען די באדינגונגען פון דער אופגאבע אזעלכע, אז א ריכטיקן ענטפער אף דער פראגע, וואָס איז געשטעלט אין דער אופגאבע, גיבן נאָר גאנצע באטרעפן, און אמאָל אויך בלויז גאנצע און דערצו נאָך פּאָזיטיווע באטרעפן.

אופגאבע 1. צעגלידערט די צאָל 118 אף אזוינע צוויי צאָלן, וואָס איינע זאָל זיך טיילן אף 11, און די צווייטע אף 17.

באצייכענענדיק איין צאָל דורך $11x$, און די צווייטע דורך $17y$, באקומען מיר די גלײַכונג:

$$11x + 17y = 118.$$

אזויווי אין דער אופגאבע איז גאָרנישט ניט געזאָגט וועגן דעם צייכן פון די צאָלן, אף וועלכע מע דארף צעגלידערן די צאָל 118, קאָנען מיר אינעם געגעבענעם פאל רעכענען אויך נעגאטיווע לייזונגען אלס אן ענטפער אף דער אופגאבע. צום בײַשפּיל, דער באדינגונג פון דער אופגאבע באפרידיקן די צאָלן 33 און 85 (בא $x = 3$ און $y = 5$). עס באפרידיקן אָבער אויך די צאָלן 220 און 102—(בא $x = 20$ און $y = -6$).

אופגאבע 2. אף איינפּאקן סאמאָווארן זײַנען פאראן קאסטנס, וואָס אין אייניקע פון זיי לייגן זיך איין 4 סאמאָווארן, אין אנדערע 7. וויפל קאסטנס דארף מען נעמען פון איין מין און פון צווייטן אף אײַנצופאקן 41 סאמאָווארן?

ווען מיר באצייכענען די צאָל קליינע קאסטנס דורך x, און די צאָל גרויסע דורך y, וועלן מיר האָבן א גלײַכונג:

$$4x + 7y = 41.$$

קלאָר, אַז לויטן באַדינג פֿון דער אויפֿגאַבע קאָנען דאָ טויגן בלויז גאַנצע און דערצו פּאָזיטיווע לייזונגען. די געגעבענע גלײַכונג דערלאָזט בלויז איינע אַזאַ לייזונג, נעמלעך:

$$x=5,\ y=3.$$

אָפֿט אַזאַ אויפֿן איז נייטיק צו קענען לייזן אומבאַשטימטע גלײַכונגען אין גאַנצע צאָלן און אויך אין גאַנצע און פּאָזיטיווע צאָלן.

147. סימען פֿון דער אומעגלעכקײַט צו לייזן אַ גלײַכונג אין גאַנצע צאָלן.

צום בײַשפּיל, עס איז געגעבן די גלײַכונג:

$$ax+by=c.$$

אויב צווישן די קאָעפֿיציענטן a, b און c זײַנען פֿאַראַן ברוכצאָליקע, קאָנען מיר ברענגען אַלע קאָעפֿיציענטן צו איין דײַטער, וועלכן מע וואַרפֿט דערנאָך אָפּ. דעמלט וועלן אַלע קאָעפֿיציענטן זײַן גאַנצע צאָלן.

ווײַטער, אויב a, b און c האָבן אַ וועלכן עס איז געמיינזאַמען קייפֿלער, קאָן מען אָפּ אים פֿאַרקירצןביידע טיילן פֿון דער גלײַכונג.

וועלן מיר דעריבער אָננעמען, אַז די קאָעפֿיציענטן a, b און c זײַנען גאַנצע צאָלן, וואָס האָבן ניט קיין געמיינזאַמען קייפֿלער.

לאָמיר איצט אָננעמען, אַז a און b האָבן אַלס געמיינזאַמען קייפֿלער אַ געוויסע גאַנצע צאָל, וואָס אונטערשיידט זיך פֿון 1. לאָמיר זאָגן:

$$a=ma_1;\quad b=mb_1.$$

די גלײַכונג וועט אָננעמען די פֿאָרם:

$$ma_1x+mb_1y=c.$$

צעטיילנדיק אַלע זײַנע גלידער אָפּ m, באַקומען מיר:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

בײַ גאַנצע באַטרעפֿן פֿון x און y שטעלט דער לינקער טייל פֿון דער גלײַכונג מיט זיך פֿאָר אַ גאַנצע צאָל, דער רעכטער טייל — אַ ברוכצאָל, ווײַל, לויט ווי מיר האָבן אָנגענומען, טיילט זיך c ניט אָפּ m. אַזאַ גלײַכקײַט איז אומעגלעך. הייסט עס:

אויב די קאָעפֿיציענטן בײַ די אומבאַוווּסטע פֿון אַן אומבאַשטימטער גלײַכונג האָבן אַ געמיינזאַמען קייפֿלער, וועלכן דער פֿרײַער גליד האָט ניט, קאָן די גלײַכונג ניט האָבן קיין גאַנצע לייזונגען.

דעריבער וועלן מיר אין אַלע ווײַטערדיקע באַהאַנדלונגען ריידן וועגן די צאָלן a און b ווי וועגן קעגנזײַטיק איינפֿאַכע.

148. סימען פֿון אומעגלעכקײַט צו לייזן גלײַכונגען אין פּאָזיטיווע צאָלן.

זאָלן, צום בײַשפּיל, אין דער גלײַכונג

$$ax+by=c$$

די קאָעפּיציִענטנ a און b זײַנ פּאָזיטיוו, און דער פרײַער גליד c נעגאַטיוו. דעמלט וועט בא יעטווידער פּאָזיטיווער באדײַטונג פונ x און y דער לינקער טייל פונ דער גלײַכונג זײַנ א פּאָזיטיווער, און דער רעכטער בלײַבט א נעגאַטיווער. אזא גלײַכקײַט איז אומעגלעכ.

אויב די קאָעפּיציִענטנ a און b זײַנענ נעגאַטיוו און c איז פּאָזיטיוו, איז ווענ מיר קייפלענ אַלע גלידער פונ דער גלײַכונג אפּ -1, ברענגענ מיר דעמ דאָזיקנ פאַל צו דעמ פּאָריקנ. הייסט דאָס:

אויב די קאָעפּיציִענטנ בא די אומבאוווּסטע פונ אנ אומבאשטימטער גלײַכונג האָבנ א צייכנ, וואָס איז קעגנזעצלעכ דעמ צייכנ פונ דעמ פרײַענ גליד, האָט די גלײַכונג ניט קיינ פּאָזיטיווע לייזונגענ.

149. אַלגעמיינע פאָרמולע פונ די וואָרצלענ פונ אנ אומבאשטימטער גלײַכונג.

לאָמיר אָננעמענ, אז אפּ א וועלכנ עס איז אופנ (צומ בײַשפּיל, דורכ אומיטלבארע פּרוּוונ) האָבנ מיר געפונענ איינ פּאָר גאנצע וואָרצלענ פונ אנ אומבאשטימטער גלײַכונג:

$$ax + by = c.$$

זאָלנ די דאָזיקע וואָרצלענ זײַנ α און β. אונטערשטעלנדיק זיי אינ דער געגעבענער גלײַכונג, באקומענ מיר א אידענטישקײַט:

$$a\alpha + b\beta = c.$$

אראָפּנעמענדיק די דאָזיקע אידענטישקײַט פונ דער געגעבענער גלײַכונג, באַקומענ מיר:

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0,$$

פונוואנענ:

$$ax = a\alpha - b(y-\beta),$$

אָדער:

$$x = \alpha - \frac{b(y-\beta)}{a}.$$

קעדיי x זאָל זײַנ א גאנצע צאָל, איז נייטיק, אז דער אויסדרוק $\frac{b(y-\beta)}{a}$ זאָל זײַנ א גאנצע צאָל (ווײַל α איז א גאנצע צאָל). מיט אנדערע ווערטער, עס איז נייטיק, אז דער אויסדרוק $b(y-\beta)$ זאָל זיכ טיילנ אָנ א רעשט אפּ a. אָבער, ווי מיר נעמענ אָנ, איז b א קעגנזײַטיק איינפאכע צאָל מיט a, פאָלגלעכ איז נייטיק, אז $y-\beta$ זאָל זיכ אָנ א רעשט טיילנ אפּ a. באצייכענענדיק דעמ גאנצנ טיילווערט פונ $y-\beta$ אפּ a דורכ t (ער קאָנ זײַנ סײַ פּאָזיטיוו, סײַ נעגאַטיוו), באקומענ מיר:

$$\frac{y-\beta}{a} = t,$$

אָדער:

$$y = \beta + at.$$

אונטערשטעלנדיק אינ דער פאָרמולע פאר x די צאָל t אָנשטאָט דער ברוכצאָל $\frac{y-\beta}{a}$, באקומענ מיר:

$$x = \alpha - bt.$$

אפ אזא אויפנ האָבנ מיר ענדגילטיק פאר די וואָרצלענ פונ אנ אומבאשטימטער גלײַכונג די פאָרמולעס:

$$x = \alpha + bt,$$
$$y = \beta - at.$$

אָדער

$$x = \alpha - bt,$$
$$y = \beta + at.$$

געבנדיק אינ די דאָזיקע פאָרמולעס דעמ t באליביקע גאנצע באטרעפנ, פאָזי־טיווע אונ נעגאטיווע, באקומענ מיר אומענדלעכ פיל גאנצע לײזונגענ פונ דער געגע־בענער אומבאשטימטער גלײַכונג. ווי אנ אײנצלנעמ פאל באקומענ מיר בא $t=0$ די פאָר וואָרצלענ α אונ β, וועלכע מיר האָבנ שוינ פריִער געפונענ.

צוקוקנדיק זיכ צו די געפונענע פאָרמולעס, איז גרינג צו באמערקנ, אז זײ זײַנענ צונויפגעשטעלט לויט פאָלגנדיקנ קלאָל.

1. דער ערשטער גליד פונ דער פאָרמולע איז דער געפונענער אײנצלנער באטרעפ פונ דער געגעבענער אומבאוווסטער.

2. דער צווייטער גליד פונ דער פאָרמולע איז די באליביקע צאָל t, געקײפלט אפנ קאָעפיציִענט פונ דער געגעבענער גלײַכונג; דערבײַ ווערט אינ דער פאָרמולע פאר x גענומענ דער קאָעפיציענט בא y אינ דער געגעבענער גלײַכונג, אונ אינ דער פאָרמולע פאר y ווערט גענומענ דער קאָעפיציִענט בא x.

3. אײנער פונ די קאָעפיציִענטנ ווערט גענומענ מיט א פארקערטנ צײכנ.

עס איז ניט שווער צו זענ, אז עס איז קלאָר ניט קײנ אונטערשייד, וועלכנ פונ די קאָעפיציִענטנ מיר נעמענ מיט דעמ זעלביקנ צײכנ, מיט וועלכנ ער שטײט אינ דער גלײַכונג, אונ וועלכנ מיר נעמענ מיט א פארקערטנ צײכנ. אונ טאקע, די פאָרמולעס

$$x = \alpha - bt,$$
$$y = \beta + at$$

אונ

$$x = \alpha + bt$$
$$y = \beta - at$$

וועלנ געבנ די זעלביקע לײזונגענ; בלויז יענע לײזונגענ, וועלכע אײנ פאָר פאָרמולעס גיט בא פאָזיטיווע באטרעפנ פונ t, וועט די צווייטע געבנ בא אנטשפרעכיקע נעגאטיווע באטרעפנ פונ t, אונ פארקערט.

בײַשפּיל. עס איז געגעבנ א גלײַכונג:

$$3x + 5y = 26.$$

דורך דירעקטער אונטערשטעלונג איבערצייגן מיר זיך, אז די גלייכונג באפרי־דיקט זיך דורך די באטרעפן $x=2$ און $y=4$. דעמלט וועלן אלע איבעריקע לייזונגען ארויסגעפונען ווערן פון די פארמולעס:

$$x=2+5t,$$
$$y=4-3t,$$

אדער

$$x=2-5t,$$
$$y=4+3t.$$

געבנדיק אין די דאזיקע פארמולעס דעם t באליביקע גאנצע באטרעפן, וועלן מיר באקומען פארשיידענע פארן גאנצע ווארצלען פון דער געגעבענער גלייכונג. צום ביישפיל, ווען מיר נעמען אן די אונטערשטע פאר פארמולעס, וועלן מיר האבן:

t	0	1	2	3	-1	-2	...
x	2	7	12	17	-3	-8	...
y	4	1	-2	-5	7	10	...

ווען מיר וואלטן גענומען די אויבערשטע פאר פארמולעס, וואלטן מיר באקומען די זעלביקע לייזונגען, געבנדיק דעם t בעהאדראגעדיק די באטרעפן: $0, -1, -2, -3, 1, 2$ א. וו. וו.

אזוי אויפן ווערט די אויפגאבע פון לייזן אין גאנצע צאלן אן אומבאשטימטע גלייכונג דערפירט צו דעם, אז עס זאל געפונען ווערן א וועלכע עס איז איין פאר לייזונגען.

150. אויפן פון אונטערשטעלן. אם צו געפינען איין פאר לייזונגען פון אן אומבאשטימטער גלייכונג קאן מען זיך באנוצן מיט פאלגנדיקן מיטל. לאמיר זאגן, אז עס איז געגעבן א גלייכונג:

$$ax+by=c.$$

באשטימען מיר איינע פון די אומבאוווסטע אפהענגיק פון דער צווייטער (גלייכער איז צו נעמען יענע, בא וועלכער דער קאעפיציענט איז א קלענערער). זאגן מיר, צום ביישפיל, $a<b$. דעמלט איז

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

לאמיר געבן דעם y בעהאדראגעדיק די באטרעפן: $0; 1; 2; 3, \ldots$ ביזוואנען דער אויסדרוק $c-by$ וועט זיך ניט צעטיילן אן א רעשט אפ a. לאמיר אננעמען, אז בא $y=n$ טיילט זיך דער אויסדרוק $c-bn$ אן א רעשט אפ a און גיט אינעם טיילוועדט m. דעמלט איז:

$$x=m \quad \text{און} \quad y=n$$

און גיבן איין לייזונג פון דער געגעבענער גלײַכונג. און טאקע, מיר האָבן:

$$\frac{c-bn}{a}=m,$$

אָדער

$$c-bn=am,$$

$$am+bn=c.$$

די לעצטע גלײַכקײַט ווײַזט, אז די צאָלן m און n באפרידיקן דער געגעבענער גלײַכונג.

ב ײַ ש פּ י ל. עס איז געגעבן א גלײַכונג:

$$7x-4y=2.$$

באשטימען מיר פון דער גלײַכונג דעם y:

$$4y=7x-2,$$

$$y=\frac{7x-2}{4}.$$

געבנדיק דעם x בעהאדראָגעדיק די באטרעפן: 0, 1, 2,..., איבערצײַגן מיר זיך, אז בא $x=2$ טיילט זיך דער אויסדרוק $7x-2$ אפ 4 און גיט אינעם טייל־ווערט 3. פאָלגלעך, האָבן מיר איין פּאָר:

$$x=2;\quad y=3.$$

די איבעריקע לייזונגען ווערן געפונען לויט דער אלגעמיינער פאָרמולע:

$$x=2+4t,\qquad x=2-4t,$$

אָדער

$$y=3+7t,\qquad y=3-7t.$$

ב א מ ע ר ק ו נ ג. אין דער טעאָריע פון צאָלן ווערט דערוויזן, אז אויב a און b זײַנען קעגנזײַטיק איינפאכע צאָלן, וועט זיך צווישן די צאָלן:

$$0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ (a-1)$$

שטענדיק געפינען איין צאָל y, בא וועלכער דער אויסדרוק

$$c-by$$

טיילט זיך אָן א רעשט אפ a. דעריבער רעקאָמענדירט זיך, קעדיי אויסצומײַדן אטאך אויספּרובירונגען, צו נעמען אלס טיילער דעם קלענערן פון די קאָעפיציענטן a און b.

151. באזונדערער פאל פון אן אומבאשטימטער גלײַכונג. אן אומבאשטימטע גלײַכונג לייזט זיך גרינג אין דער אלגעמיינער פאָרם, ווען איינער פון די קאָעפיציענטן בא די אומבאוווסטע איז גלײַך צו איינס. לאָמיר, צום בײַשפּיל, זאָגן, אז דער קאָעפיציענט בא x איז גלײַך צו איינס. וועלן מיר האָבן:

$$x+by=c.$$

באשטימען מיר x:

$$x=c-by.$$

קלאָר, אז יעטווידער גאנצנ באטרעפ פונ y וועט אנטשפרעכנ אויכ א גאנצער באטרעפ פונ x.

בײַשפּיל. עס איז געגעבנ ד גלײַכונג:

$$5x + y = 18.$$

געפינענ מיר:

$$y = 18 - 5x.$$

געבנדיק דעמ x באליביקע גאנצע באטרעפנ, וועלנ מיר אנטשפרעכיק באקומענ גאנצע באטרעפנ פארנ y:

x	0	1	2	3	4	—1	—2	...
y	18	13	8	3	—2	23	28	...

152. אלגעמײנע לײזונג פונ אנ אומבאשטימטער גלײַכונג. מיר וועלנ באווײַזנ אפ א בײַשפּיל דעמ אויפנ פונ לײזנ אומבאשטימטע גלײַכונגענ מיט באליביקע קאָעפיציענטנ. לאָמיר זאָגנ, אז עס איז געגעבנ א גלײַכונג:

$$23x + 53y = 109.$$

באשטימענ מיר פונ דער דאָזיקער גלײַכונג דעמ x:

$$x = \frac{109 - 53y}{23},$$

אָדער, אויסשליסנדיק דעמ גאנצנ טײל:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}.$$

קעדײ x זאָל זײַנ א גאנצע, איז נײטיק, אז דער אויסדרוק $\frac{17 - 7y}{23}$ זאָל זײַנ א גאנצע צאָל. באצײכענענדיק די לעצטע דורכ t, וועלנ מיר האָבנ:

$$\frac{17 - 7y}{23} = t$$

אָדער

$$17 - 7y = 23t,$$

$$23t + 7y = 17.$$

אויב מיר געפינענ פאר y אונ t אזוינע גאנצע באטרעפנ, וועלכע זאָלנ באפרידיקנ דער גלײַכונג:

$$\frac{17 - 7y}{23} = t,$$

אָדער, וואָס עס איז דאָס זעלבע, דער גלײַכונג

$$23t + 7y = 17,$$

וואָלטן מיר מיט דעם גופע געפונען די אנטשפּרעכנדיקע גאנצע באטרעפן פאר x, און אונדזער אופגאבע וואָלט געווען געלייזט. אזוי ארום האָבן מיר די לייזונג פון דער געגעבענער גלײַכונג דערפירט צו א לייזונג פון א צווייטער, אײנפאכערער גלײַכונג (מיט קלענערע קאָעפיציִענטן).

אין באצוג צו דער נײַער גלײַכונג באגייען מיר זיך אפן זעלביקן אופן. מיר באשטימען פון איר דעם y:

$$y=\frac{17-23t}{7}=2-3t+\frac{3-2t}{7}.$$

קעדיי y זאָל זײַן א גאנצע, איז נייטיק, אז $\frac{3-2t}{7}$ זאָל זײַן א גאנצע צאָל. באצייכענענדיק די דאָזיקע צאָל דורך t_1, וועלן מיר האָבן:

$$\frac{3-2t}{7}=t_1,$$

אָדער

$$7t_1+2t=3.$$

בא גאנצע t און t_1, וועלכע באפרידיקן דער לעצטער גלײַכונג, באקומען מיר אנטשפּרעכיקע גאנצע באטרעפן פאר x און y, וועלכע באפרידיקן די געגעבענע גלײַכונג. פאָלגלעך, איז אונדזער אופגאבע דערפירט געוואָרן צו דער לייזונג פון דער לעצטער גלײַכונג, בא וועלכער די קאָעפיציִענטן זײַנען נאָך קלענער. ווײַטער באגייען מיר זיך מיט איר אויך אזוי, ווי פריִער:

$$t=\frac{3-7t_1}{2}=1-3\,t_1+\frac{1-t_1}{2}.$$

צוגלײַכנדיק דעם אויסדרוק $\frac{1-t_1}{2}$ צו דער גאנצער צאָל t_2, באקומען מיר:

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2,$$

אָדער

$$2t_2+t_1=1.$$

מיר האָבן באקומען א גלײַכונג, אין וועלכער דער קאָעפיציִענט בא איינער פון די אומבאוווּסטע איז גלײַך צו איינס, און אזעלכע גלײַכונגען לייזן קאָנען מיר שוין. ווען מיר לייזן זי, באקומען מיר:

$$t_1=1-2t_2.$$

געבנדיק אין דער דאָזיקער גלײַכונג דעם t_2 באליביקע גאנצע באטרעפן, וועלן מיר באקומען גאנצע באטרעפן פאר t_1. אונטערשטעלנדיק די געפונענע פאָרן גאנצע באטרעפן פון t_1 און t_2 אינעם אויסדרוק פאר t:

$$t=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}=1-3t_1+t_2,$$

באקומען מיר די אנטשפּרעכיקע גאנצע באטרעפן פאר t. אונטערשטעלנדיק די אנטשפּרעכיקע פאָרן באטרעפן פון t און t_1 אינעם אויסדרוק פאר y:

$$y=2-3t+\frac{3-2t}{7}=2-3t+t_1,$$

באקומענ מיר די אנטשפרעכיק גאנצע באטרעפנ פאר y. ענדלעך, מאכנדיק אנ אונ־
טערשטעלונג פונ די געפונענע פארנ באטרעפנ פאר y אונ t אינעם אויסדרוק
פאר x:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t,$$

באקומענ מיר די אנטשפרעכיקע גאנצע באטרעפנ פאר x.

מע קאנ אבער דירעקט אויסדריקנ x אונ y אינ דער אפהענגיקייט פונ t_2. צו
דעם צוועק שטעלנ מיר אונטער אינעם אויסדרוק פאר t אנשטאט t_1 זײַנ אויסדרוק
דורכ t_2:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2,$$

אדער

$$t = -2 + 7t_2.$$

לאמיר איצט אונטערשטעלנ אינעם אויסדרוק פאר y אנשטאט t אונ t_1 זייערע
אויסדרוקנ דורכ t_2:

$$v = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2);$$

אדער

$$y = 9 - 23t_2.$$

ענדלעך, אונטערשטעלנדיק די געפונענע באטרעפנ פונ y אונ t אינעם אויסדרוק
פאר x, באקומענ מיר:

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t) + (-2 + 7t_2),$$

אדער

$$x = -16 + 53t_2.$$

אפ אזא אופנ באקומענ מיר פאר x אונ y די פארמולעס:

$$x = -16 + 53t_2,$$
$$y = 9 - 23t_2.$$

געבנדיק אינ זיי באליביקע גאנצע באטרעפנ פאר t_2, סײַ פאזיטיווע, סײַ נעגא־
טיווע, וועלנ מיר באקומענ אנ א צאל לייזונגענ פונ דער געגעבענער גלײַכונג; אײ־
ניקע פונ זיי שטייענ אינ דער פאלגנדיקער טאבעלע:

t_2	0	1	2	-1	-2
x	-16	37	90	-69	-122
y	9	-14	-37	32	55

באטראכטנדיק די אפעראציעס, וועלכע זײַנענ געמאכט געווארנ איבער די קאע־
פיציענטנ פונ דער געגעבענער אונ פונ די פאלגנדיקע גלײַכונגענ, קאנ מענ באמערקנ
אזא בעהאדראגעדיקײַט.

1. דעם גרעסערן קאָעפיציִענט פון דער געגעבענער גלײַכונג 53 האָט מען גע־טײלט אפן קלענערן 23; עס האָט זיך באקומען א טײלװערט 2 און א רעשט 7.

2. דעם קלענערן קאָעפיציִענט פון דער געגעבענער גלײַכונג 23 האָט מען גע־טײלט אפן רעשט 7; האָט זיך באקומען דער טײלװערט 3 און א צװײטער רעשט 2.

3. דעם ערשטן רעשט 7 האָט מען געטײלט אפן צװײטן רעשט 2; האָט זיך באקומען דער טײלװערט 3 און א דריטער רעשט 1.

מיט אנדערע װערטער, מיר האָבן געטאָן פונקט אזױ, װי מיר װאָלטן געזוכט דעם געמײנזאמען גרעסטן טײלער פון די קאָעפיציִענטן פון דער געגעבענער גלײַכונג.

מיר װײסן, אז צװײ קעגנזײַטיק אײנפאכע צאָלן האָבן אלס א געמײנזאמען גרעסטן טײלער אן אײנס. און אזױװי אין אומבאשטימטע גלײַכונגען נעמען מיר שטענדיק אָן, אז די קאָעפיציִענטן בא די אומבאװוסטע זײַנען קעגנזײַטיק אײנפאכע, איז, מאכנדיק איבער דער גלײַכונג די אויבן אָנגעװיזענע אָפּעראציעס, װעלן מיר שטענדיק קומען צו אזא גלײַכונג, װו דער קאָעפיציִענט בא אײנער פון די אומבאװוסטע איז גלײַך צו אײנס. מיט דעם גופא געפינען מיר די לײזונגען פון דער געגעבענער גלײַכונג. פונדאנען איז געדרונגען:

אויב די קאָעפיציִענטן בא די אומבאװוסטע פון אן אומבאשטימטער גלײַכונג זײַנען קעגנזײַטיק אײנפאכע צאָלן, האָט די גלײַכונג שטענדיק גאנצע לײזונגען.

153. פארײנפאכונג פון א גלײַכונג. באם לײזן אומבאשטימטע גלײַכונגען קאָן מען אָפטמאָל ארײַנטראָגן געװיסע פארײנפאכונגען, װעלכע דערלויבן גיכער קומען צו דער לײזונג.

1. אויב אײנער פון די קאָעפיציִענטן בא די אומבאװוסטע און דער פרײַער גליד האָבן א געמײנזאמען קײפלער, קאָן מען אים פארקירצן בײדע טײלן פון דער גלײַכונג.

ב ײַ ש פ י ל 1. עס איז געגעבן א גלײַכונג:

$$6x-5y=21.$$

דער קאָעפיציִענט 6 און דער פרײַער גליד האָבן דעם געמײנזאמען קײפלער 3. פאָלגלעך, מוז זיך דער גליד $5y$ טײלן אף 3, און אזױװי 5 טײלט זיך ניט אף 3, מוז דער y זײַן טײלבאר אף דרײַ. אָנעמענדיק, אז $y=3t$, װו t איז א גאנצע צאָל, װעלן מיר האָבן:

$$6x-15t=21,$$

אָדער, נאָכן פארקירצן אף 3:

$$2x-5t-7.$$

מיר לײזן די לעצטע גלײַכונג:

$$x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1;\ 2t_1-t=1;\ t=-1+2t_1.$$

אונטערשטעלנדיק דעם געפונענעם באטרעף אין די אויסדרוקן, וואָס זײַנען באקומען געוואָרן פאר x און y, געפינען מיר:

$$x = 3 + 2(-1 + 2t_1) + t_1 = 1 + 5t_1;$$
$$y = 3(-1 + 2t_1) = -3 + 6t_1.$$

ביַישפּיל 2.

עס איז געגעבן א גלײַכונג:

$$9x + 14y = 105.$$

אָנעמענדיק, אז $y = 3t$ און פארקירצנדיק ביידע טיילן פון דער גלײַכונג אף 3, באקומען מיר:

$$3x + 14t = 35.$$

אָנעמענדיק, אז אין דער דאָזיקער גלײַכונג איז $x = 7t_1$ און פארקירצנדיק ביידע טיילן פון דער גלײַכונג אף 7, באקומען מיר:

$$3t_1 + 2t = 5.$$

מיר לייזן די לעצטע גלײַכונג:

$$t = \frac{5 - 3t_1}{2} = 2 - t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 2 - t_1 + t_2;$$

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2; \quad 1 - t_1 = 2t_2; \quad t_1 = 1 - 2t_2.$$

מאכנדיק די בעהאדראָגעדיקע אונטערשטעלונגען, באקומען מיר:

$$t = 2 - (1 - 2t_2) + t_2 = 1 + 3t_2;$$
$$x = 7t_1 = 7(1 - 2t_2) = 7 - 14t_2;$$
$$y = 3t = 3(1 + 3t_2) = 3 + 9t_2.$$

2. אויב אין דעם אויסדרוק, וואָס ווערט צוגעגליכן צו א גאנצער צאָל, האָבן די גלידער, וועלכע געפינען זיך אינעם צײַלער, א געמיינזאמען קייפלער, קאָן מען אים ארויסטראָגן אויסער די קלאמערן.

ביַישפּיל 3.

עס איז געגעבן א גלײַכונג:

$$12x + 17y = 41.$$

לייזן מיר זי אין באצוג צו x:

$$x = \frac{41 - 17y}{12} = 3 - y + \frac{5 - 5y}{12} = 3 - y + 5\frac{1 - y}{12}.$$

קעדיי דער אויסדרוק $5\frac{1-y}{12}$ זאָל זײַן א גאנצע צאָל, איז נייטיק און גענוג, אז $\frac{1-y}{12}$ זאָל זײַן א גאנצע צאָל.

צוגלײַכנדיק דעם דאָזיקן אויסדרוק צו דער גאַנצער צאָל t, באַקומען מיר:

$$\frac{1-y}{12}=t;\quad 1-y=12t;\quad y=1-12t.$$

אַנטשפּרעכיק דערצו באַקומען מיר פאַר x:

$$x=3-(1-12t)+5t=2+17t.$$

3. אויב באַם אויסטײלן דעם גאַנצן טײל װעט דער רעשט זײַן מער װי אַ העלפט פונעם טײלער, לוינט אַרײַנצופירן אַ נעגאַטיװן רעשט.

ב ײַ ש פּ י ל 4.

עס איז געגעבן אַ גלײַכונג:

$$11x-20y=49.$$

לײזן מיר זי בענעגײַע x:

$$x=\frac{49+20y}{11}=4+2y+\frac{5-2y}{11}=4+2y+t;$$

$$\frac{5-2y}{11}=t;\quad 5-2y=11t;\quad 11t+2y=5;$$

$$y=\frac{5-11t}{2}=2-5t+\frac{1-t}{2}=2-5t+1t_1;$$

$$\frac{1-t}{2}=t_1;\quad 1-t=2t_1;\quad t=1-2t_1.$$

מאַכנדיק אונטערשטעלונגען, באַקומען מיר:

$$y=2-5(1-2t_1)+t_1=-3+11t_1;$$

$$x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)=-1+20t_1.$$

װען מיר האָלטן לײזן די געגעבענע גלײַכונג אַפּ אַ געװײנלעכן אופן, װאָלטן מיר באַקומען פאַרן x:

$$x=4+y+\frac{5-9y}{11},$$

און די פאָלגנדיקע גלײַכונג װאָלט געװען:

$$\frac{5-9y}{11}=t;\quad 11t+9y=5.$$

די דאָזיקע גלײַכונג איז קאָמפּליצירטער, אײדער די, װאָס מיר האָבן באַקומען מיט דער הילף פון אַרײַנפירן אַ נעגאַטיװן רעשט:

$$11t+2y=5.$$

בײַשפּיל 5.

עס איז געגעבן א גלײַכונג:

$$15x+28y=59.$$

לייזן מיר די גלײַכונג בענעגייע x, אַרײַנפירנדיק נעגאַטיווע רעשטן:

$$x=\frac{59-28y}{15}=4-2y+\frac{-1+2y}{15}=4-2y+t;$$

$$\frac{-1+2y}{15}=t;\quad -1+2y=15t;\quad 2y-15t=1;$$

$$y=\frac{1+15t}{2}=7t+\frac{1+t}{2}=7t+t_1;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1;\quad 1+t=2t_1;\quad t=-1+2t_1.$$

מאכנדיק אונטערשטעלונגען, באַקומען מיר:

$$y=7(-1+2t_1)+t_1=-7+15t_1;$$
$$x=4-2(-7+15t_1)+(-1+2t_1)=17-28t_1.$$

פּרוּווּנדיק לייזן די גלײַכונגען, וואָס זײַנען געבראַכט געוואָרן אין די בײַשפּילן פון דעם דאָזיקן פּאַראַגראַף, אָפּ א געוויינלעכן אופן, איבערצײַגן מיר זיך גרינג, אַז, ניט אָנווענדנדיק די אָנגעוויזענע פּאַריינפאַכונגען, וואָלטן זיי אַלע געפאָדערט א גרעסערע צאָל אָפּעראַציעס אָפּ צו לייזן זיי.

154. **פּאָזיטיווע לייזונגען.** ווי מיר האָבן שוין פריִער גערעדט, דאַרף מען אָפטמאָל פון אַלע געפונענע פּאָרן וואָרצלען פון אַן אומבאַשטימטער גלײַכונג נעמען בלויז יענע, וועלכע גיבן גלײַכצײַטיק פּאָזיטיווע באַטרעפן פאַר x און y. געפינענדיק די געמיינזאַמע פאָרמולעס פאַר x און y, קאָן מען טייקעף באַשטימען, בא וואָסערע באַטרעפן פונעם באַליביקן קייפלער עס וועלן זיך באַקומען גאַנצע און פּאָזיטיווע באַטרעפן פון x און y.

לאָמיר, צום בײַשפּיל, נעמען די פאָרמולעס:

$$x=\alpha+bt;\quad y=\beta-at.$$

קעדיי x און y זאָלן זײַן פּאָזיטיוו, איז נייטיק צו נעמען פאַר t בלויז אזוינע באַטרעפן, בא וועלכע

$$\alpha+bt>0;\quad \beta-at>0.$$

לאָמיר רעכענען a פאַר א פּאָזיטיווער צאָל (דאָס האָבן מיר שטענדיק רעכט אָנצונעמען, ווײַל אין קעגנפאַל וואָלטן מיר געקאָנטביידע טיילן פון דער גלײַכונג קייפלען אָפּ -1). דעמלט קענען זײַן דרײַ פאַרשיידענע פאַלן.

1. ביידע אומגלײַכקײַטנ האָבנ א גלײַכנ באדײַט.

דאָס טרעפט, ווענ b איז א נעגאטיווע צאָל. אונ טאקע, באנוצנדיק זיכ מיט די אייגנשאפטנ פונ אומגלײַכקײַטנ, וועלנ מיר האָבנ:

$$bt > -\alpha;\quad at < \beta,$$

$$t > -\frac{\alpha}{b};\quad t < \frac{\beta}{a}.$$

אינ דעמ פאל דערלאָזט די גלײַכונג אָנ א צאָל גאנצע פאָזיטיווע לייזונגענ. אינדערעמעסנ, לאָמיר זאָגנ, אז מיר האָבנ באקומענ:

$$t < \frac{7}{2};\quad t < -1\frac{3}{5}.$$

קלאָר, אז יעדער צאָל, קלענער פונ $-1\frac{3}{5}$, באפרידיקט ביידע אומגלײַכקײַטנ. פאָלגלעכ, קאָנ מענ פאר t נעמענ א באליביקע גאנצע צאָל, וואָס איז קלענער פונ $-1\frac{3}{5}$.

לאָמיר נעמענ א צווייטנ פאל:

$$t > \frac{7}{15};\quad t > 3\frac{1}{4}.$$

קלאָר, אז ווענ מיר נעמענ פאר t א באליביקע גאנצע צאָל, גרעסער פונ $3\frac{1}{4}$, וועלנ מיר באקומענ גאנצע אונ פאָזיטיווע באטרעפנ פאר x אונ y.

בײַשפּיל 1.

$$3x - 5y = 11.$$

לייזנ מיר די דאָזיקע גלײַכונג:

$$x = \frac{11+5y}{3} = 4 + 2y - \frac{1+y}{3} = 4 + 2y - t;$$

$$\frac{1+y}{3} = t;\quad 1 + y = 3t;$$

$$y = -1 + 3t;\quad x = 4 + 2(-1+3t) - t = 2 + 5t.$$

זוכנ מיר פאָזיטיווע לייזונגענ:

$$-1 + 3t > 0;\quad 2 + 5t > 0;$$

אָדער:

$$t > \frac{1}{3};\quad t > -\frac{2}{5}.$$

נעמענדיק פאר t א באליביקע גאנצע צאָל, גרעסער פונ $\frac{1}{3}$ (אָדער, וואָס עס איז איינס אונ דאָס זעלבע, גרעסער פונ נול), וועלנ מיר באקומענ אָנ א צאָל פּאָרנ פאָזיטיווע באטרעפנ פונ x אונ y, וועלכע באפרידיקנ די געגעבענע גלײַכונג.

ביישפּיל 2.

$$8x - 3y = -13.$$

לייזן מיר די גלייכונג:

$$y = \frac{13+8x}{3} = 4 + 3x + \frac{1-x}{3} = 4 + 3x + t;$$

$$\frac{1-x}{3} = t; \quad 1 - x = 3t;$$

$$x = 1 - 3t; \quad y = 7 - 8t.$$

זוכן מיר פּאָזיטיווע לייזונגען:

$$1 - 3t > 0; \quad 7 - 8t > 0;$$

אָדער

$$t < \frac{1}{3}; \quad t < \frac{7}{8}.$$

א באַליביקער גאַנצער באַטרעף פון t, קלענער פון $\frac{1}{3}$ (ד. ה. 0; 1—; 2—; ...), גיט גאַנצע און פּאָזיטיווע באַטרעפן פאַר x און y.

2. די אומגלייכקייטן זיינען פון קעגנזייטיגן באַדייט און ווידערשפּרעכן איינע דער צווייטער.

לאָמיר אָננעמען, אַז מיר וועלן באַקומען פאָלגנדיקע אומגלייכקייטן:

$$t < \frac{7}{8}; \quad t > 1\frac{1}{3}.$$

קלאָר, אַז אַזוינע באַטרעפן פון t, וועלכע זאָלן גלייכצייטיק באַפרידיקן ביידע אומגלייכקייטן, זיינען ניטאָ. אין דעם דאָזיקן פאַל קאָן די גלייכונג ניט האָבן קיין פּאָזיטיווע לייזונגען.

ביישפּיל 3.

$$4x + 5y = -7.$$

לייזנדיק די דאָזיקע גלייכונג, באַקומען מיר:

$$x = -3 + 5t; \quad y = 1 - 4t.$$

פונדאַנען איז:

$$-3 + 5t > 0; \quad 1 - 4t > 0,$$

אָדער

$$t > \frac{3}{5}; \quad t < \frac{1}{4}.$$

די אומגלייכקייטן ווידערשפּרעכן איינע דער צווייטער; די גלייכונג האָט ניט קיין פּאָזיטיווע לייזונגען.

3. די אומגלייכקייטן זיינען פון קעגנזייטיגן באַדייט און ווידערשפּרעכן ניט איינע דער צווייטער.

לאָמיר, צום ביישפּיל, אָננעמען, אַז מיר האָבן באַקומען די אומגלייכקייטן:

$$t > 4\frac{1}{7}; \quad t < 7\frac{3}{4}.$$

אלע גאנצע באטרעפנ פונ t, וואָס זײַנענ פאראנ צווישנ $4\frac{1}{7}$ אונ $7\frac{3}{4}$, ד.ה. 5, 6 אונ 7, גיבנ פאר x אונ y פאָזיטיווע לייזונגענ. אזוי ארום איז אינ דעם פאל:

א גלײַכונג האָט אזויפיל גאנצע פאָזיטיווע לייזונגענ, וויפל גאנצע צאָלנ עס זײַנענ פאראנ צווישנ די געפונענע גרענעצנ פאר t.

מיר באמערקנ דאָ, אז אינ איינצלנע פאלנ קאָנ א גלײַכונג אויכ דאָ ניט האָבנ קיינ פאָזיטיווע לייזונגענ. דאָס וועט זײַנ דעמלט, ווענ צווישנ די געפונענע גרענעצנ פאר t איז ניטאָ קיינ איינ גאנצע צאָל. צום בײַשפּיל, לאָמיר אָנעמענ, אז מיר האָבנ באקומענ די אומגלײַכקײַטנ:

$$t > 1\frac{1}{4}; \quad t < 1\frac{7}{8}.$$

די אומגלײַכקײַטנ ווירערשפּרעכנ ניט איינע דער צווייטער, אָבער צווישנ $1\frac{1}{4}$ אונ $1\frac{7}{8}$ איז ניטאָ קיינ איינ גאנצע צאָל. די גלײַכונג האָט ניט קיינ גאנצע פאָזיטיווע לייזונגענ.

בײַשפּיל 4.

$$3x + 7y = 55.$$

לייזנ מיר די גלײַכונג:

$$x = \frac{55 - 7y}{3} = 18 - 2y + \frac{1 - y}{3} = 18 - 2y + t;$$

$$y = 1 - 3t; \qquad x = 16 + 7t.$$

פונדאנענ:

$$1 - 3t > 0; \qquad 16 + 7t > 0,$$

אָדער

$$t < \frac{1}{3}; \qquad t > -2\frac{2}{7}.$$

קלאָר, אז פאר t קאָנ מענ נעמענ בלויז די באטרעפנ

$$0; \ -1; \ -2.$$

באקומענ מיר דרײַ לייזונגענ פונ דער גלײַכונג:

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

$$5x + 4y = 3.$$

לייזנדיק די גלײַכונג, באקומענ מיר:

$$x = -1 + 4t; \quad y = 2 - 5t.$$

פונדאנענ:

$$t > \frac{1}{4}; \quad t < \frac{2}{5}.$$

די אומגלײַכקײַטנ ווידערשפּרעכנ ניט איינע דער צווייטער, אָבער צווישנ $\frac{1}{4}$ אונ $\frac{2}{5}$ איז ניטאָ קיינ גאנצע צאָלנ. האָט די גלײַכונג ניט קיינ גאנצע פּאָזי־טיווע לייזונגענ.

געניטונגענ:

לייזט אינ גאנצע פּאָזיטיווע צאָלנ די גלײַכונגענ:

252. $3x + 2y = 10; \quad 7x + 5y = 157; \quad 5x - 11y = 17; \quad 8x + 11y = 13.$

253. $7x + 9y = 35; \quad 15x + 28y = 185.$

254. צעגלידערט די צאָל 100 אפ אזוינע צוויי פּאָזיטיווע צאָלנ, אז איינע פונ זיי זאָל זיכ טיילנ אפ 7, די צווייטע אפ 11.

255. אפ לייגנ א דיל פונ 3 מ די ברייט זײַנענ פאראנ ברעטער פונ 11 סמ אונ 13 סמ די ברייט. וויפל ברעטער דארפ מענ נעמענ פונ איינ גרייס אונ פונ דער צווייטער?

256. אפ אָנשיטנ קאָרנ זײַנענ פאראנ זעק פונ צוויי מאָסגרייסנ: צו 60 קג אונ צו 80 קג. וויפל זעק דארפ מענ נעמענ פונ יעדער מאָסגרייס, קעדיי אָנשיטנ 440 קג קאָרנ אונ עס זאָלנ ניט זײַנ קיינ ניט־פולע זעק?

257. געפינט די אלגעמיינע פאָרמ פונ צאָלנ, וועלכע גיבנ באמ טיילנ אפ 7 אינ רעשט 3 אונ באמ טיילנ אפ 11 אינ רעשט 4.

צוועלפטער אָפּטייל.

פאַרייניקונגען און ניוטאָנס בינאָם.

I. פאַרייניקונגען.

155. **דעפיניציע.** פאַרשיידענע גרופּעס, וועלכע זײַנען צונויפגעשטעלט פון וועלכע עס איז געגנשטאַנדן און אונטערשיידן זיך איינע פון דער צווייטער דורך דער אָרדענונג פון די דאָזיקע געגנשטאַנדן, אָדער דורך די געגנשטאַנדן גופא, ווערן אין אַלגעמיין אָנגערופן פ א ר ײ נ י ק ו נ ג ע ן.

אויב מיר זאָלן, צום בײַשפּיל, פון די 10 פאַרשיידענע ציפער: 0, 1, 2, 3... 9 צונויפשטעלן גרופּעס צו עטלעכע ציפער אין יעדערער, צום בײַשפּיל, אַזוינע: 123, 312, 8056, 5630, 42 א. ד. גל., וועלן מיר באַקומען פאַרשיידענע פאַרייניקונגען פון די דאָזיקע ציפער. אייניקע פון זיי, צום בײַשפּיל 123 און 312, אונטערשיידן זיך בלויז דורך דער אָרדענונג פון די געגנשטאַנדן, אַנדערע אָבער, צום בײַשפּיל, 8056 און 312, זײַנען פאַרשיידן דורך זייערע געגנשטאַנדן (און אפילו דורך דער צאָל געגנשטאַנדן).

די געגנשטאַנדן, פון וועלכע עס ווערן צונויפגעשטעלט די פאַרייניקונגען, ווערן אָנגערופן ע ל ע מ ע נ ט ן און ווערן געוויינלעך באַצייכנט דורך בוכשטאַבן a, b, c...

פאַרייניקונגען קאָנען זײַן דרײַערלייקע: פּאַנאַנדערשטעלונגען, איבערשטעלונגען און קאָמבינירונגען. לאָמיר זיי באַטראַכטן באַזונדער.

156. **פּאַנאַנדערשטעלונגען.** לאָמיר אָננעמען, אַז די צאָל געגנשטאַנדן, פון וועלכע מיר שטעלן צונויף פאַרשיידענע פאַרייניקונגען, איז גלײַך צו דרײַ (צום בײַשפּיל דרײַ קאָרטן); באַצייכענען מיר די דאָזיקע געגנשטאַנדן דורך a, b און c. פון זיי קאָן מען צונויפשטעלן פאַרייניקונגען:

צו איינציקע:

$$a, b, c;$$

צו צוויי:

$$ab, ac, bc; ba, ca, cb;$$

און צו דרײַ:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

לאָמיר נעמענ פונ די דאָזיקע פאַרייניקונגענ די פאַרייניקונגענ צו צוויי. זיי אונ־טערשיידנ זיכ איינע פונ דער צווייטער אָדער דורכ די געגנשטאַנדנ, צום בײַשפּיל ab אונ ac, אָדער דורכ דער אָרדענונג פונ די געגנשטאַנדנ, צום בײַשפּיל ab אונ ba, אָבער די צאָל געגנשטאַנדנ איז אינ זיי איינע אונ דיֶ זעלביקע. אַזוינע פאַרייניקונגענ ווערנ אָנגערופנ פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ דרײַ עלע־מענטנ צו 2.

פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ m עלעמענטנ צו n ווערנ אָנגערופנ אַזוינע פאַרייני־קונגענ, וואָס יעדערע פונ זיי אַנטהאַלט n עלעמענטנ, גענומענ פונ די געגעבענע m עלעמענטנ, אונ וועלכע אונטערשיידנ זיכ איינע פונ דער צווייטער אָדער דורכ די עלעמענטנ אָדער דורכ דער אָרדענונג פונ די עלעמענטנ (הייסט עס, ס'מוז זײַנ $n \leqslant m$). אַזוי, צום בײַשפּיל, וועלנ די אויבנגעשריבענע פאַרייניקונגענ צו 3 זײַנ פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ 3 עלעמענטנ צו 3 (זיי אונטערשיידנ זיכ בלויז דורכ דער אָרדענונג), די פאַרייניקונגענ צו 2 וועלנ זײַנ פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ דרײַ עלעמענטנ צו 2 (זיי אונטערשיידנ זיכ אָדער לויט די געגנשטאַנדנ אָדער לויט דער אָרדענונג).

פונ די געגעבענע m עלעמענטנ קאָנענ זײַנ פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 1, צו 2, צו 3... אונ, ענדלעכ, צו m.

אָפטמאָל איז נייטיק צו וויסנ די צאָל פונ אַלע מעגלעכע פאַנאַנדערשטעלונגענ, וועלכע מענ קאָנ צונויפשטעלנ פונ m עלעמענטנ, ניט מאַכנדיק די פאַנאַנדערשטע־לונגענ גופא. די דאָזיקע צאָל איז אָנגענומענ צו באַצייכענענ אַזוי: A_m^n (A איז דאָ דער ערשטער בוכשטאַב פונעם פראַנצויזישנ וואָרט „*arrangement*“, וואָס באַטײַט „פאַנאַנדערשטעלונג“). קעדיי צו געפינענ די דאָזיקע צאָל, לאָמיר באַטראַכטנ דעם גאַנג, דורכ וועלכנ מענ קאָנ צונויפשטעלנ אַלערליי פאַנאַנדערשטעלונגענ.

לאָמיר אָננעמענ, אַז עס איז אונדז געגעבנ געוואָרנ m עלעמענטנ:

$$a,\ b,\ c \ldots k,\ l.$$

אינ אָנהייב שטעלנ מיר פונ זיי צונויפ אַלע פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 1. קלאָר, אַז דאָ זײַנענ פאַראַנ m פאַנאַנדערשטעלונגענ.

הייסט עס,

$$A_m^1 = m.$$

איצט שטעלנ מיר צונויפ אַלע פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 2. מיט דעם צוועק שטעלנ מיר צו צו יעדערער פונ די פריִער געמאַכטע פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 1 אַלע געבלי־בענע $m - 1$ עלעמענטנ צו 1. אַזוי שטעלנ מיר צו צום עלעמענט a קעסיידערדיק די געבליבענע עלעמענטנ:

$$b,\ c,\ \ldots k,\ l;$$

צום עלעמענט b שטעלן מיר צו קעסיידערדיק די געבליבענע עלעמענטן:

$$a, c \ldots k, l$$

א. א. וו. דעמלט באקומען מיר פאָלגנדיקע פאנאנדערשטעלונגען צו 2.

m שורות:

$ab, ac, ad \ldots ak, al$ ($m-1$ פאנאנדערשטעלונגען)
$ba, bc, bd \ldots bk, bl$ ($m-1$ פאנאנדערשטעלונגען)
$ca, cb, cd \ldots ck, cl$ ($m-1$ פאנאנדערשטעלונגען)
. . . .
$la, lb, lc \ldots lk$ ($m-1$ פאנאנדערשטעלונגען)

אזוי ווי עלעמענטן זײַנען פאראן סאכאקל m, איז פון יעדער פאנאנדערשטעלונג צו איין עלעמענט באקומען מיר $m-1$ פאנאנדערשטעלונגען צו 2, און סאכאקל וועלן זײַן פאנאנדערשטעלונגען:

$$(m-1)\,m.$$

קלאָר, אז קיין אנדערע פאנאנדערשטעלונגען צו 2 קאָנען ניט זײַן. הייסט עס, אז:

$$A_m^2 = m(m-1).$$

קעדיי איצט צונויפצושטעלן פאנאנדערשטעלונגען צו 3, נעמען מיר יעדערע פון די נאָרוואָס צונויפגעשטעלטע פאנאנדערשטעלונגען צו 2 און שטעלן צו יעדערער צו איינציקווײַז אלע $m-2$ געבליבענע עלעמענטן. דעמלט באקומען מיר פאָלגנדיקע פאנאנדערשטעלונגען צו 3:

$m(m-1)$ שורות:

$abc, abd \ldots abk, abl$ ($m-2$ פאנאנדערשטעלונגען)
$acb, acd \ldots ack, acl$ ($m-2$ פאנאנדערשטעלונגען)
. . . .
$lka, lkb \ldots\ldots$ ($m-2$ פאנאנדערשטעלונגען)

אזוי ווי די צאָל פון אלע פאנאנדערשטעלונגען צו 2 איז גלײַך $m(m-1)$ און פון יעדערער באקומט זיך $(m-2)$ פאנאנדערשטעלונגען צו 3, וועלן ארום און ארום זײַן אזוינע פאנאנדערשטעלונגען:

$$(m-2)[m(m-1)] = m(m-1)(m-2).$$

אף אזא אופן איז:

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

אף דעם זעלביקן אופן באקומען מיר:

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3);$$
$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4),$$

און בכלל איז:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

דאָס איז די פאָרמולע פונ די פאַנאַנדערשטעלונגענ; אַרויסזאָגנ קאָנ מענ זי אַזוי:

די צאָל פונ אַלע מעגלעכע פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ m עלעמענטנ צו n איז גלײַכ צו דעמ פּראָדוקט פונ n קעסיידערדיקע גאַנצע צאָלנ, פונ וועלכע די גרעסטע איז m. אַפ אַזאַ אויפנ איז:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12; \; A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24;$$

$$A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

א. ד. ג.

157. אויפגאַבעס. 1) אינ קלאַס זײַנענ 10 לערנ־געגנשטאַנדנ אונ 5 פאַרשיידענע לעקציעס אַ טאָג. אַפ וויפל אויפאַנימ קענענ די לעקציעס אײַנגעטיילט ווערנ דורכנ טאָג?

קלאָר, אַז די אַלע מעגלעכע אײַנטיילונגענ פונ די לעקציעס דורכנ טאָג שטעלנ מיט זיכ פאָר אַלע מעגלעכע פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ 10 עלעמענטנ צו 5; דעריבער דאַרפנ אויפאַנימ פונ אײַנטיילנ זײַנ אַרומ אונ אַרומ:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

2) וויפל קאָנ מענ בילדנ גאַנצע צאָלנ, וואָס יעדערע פונ זיי זאָל זיכ אויסדריקנ דורכ דרײַ פאַרשיידענע באַדײַטיקע ציפער?

די געזוכטע צאָל איז די צאָל פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ די 9 באַדײַטיקע ציפער צו 3; הייסט עס, אַז זי איז גלײַכ:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

3) וויפל קאָנ מענ בילדנ גאַנצע צאָלנ, וואָס יעדערע פונ זיי זאָל זיכ אויסדריקנ דורכ דרײַ פאַרשיידענע ציפער?

פונ די 10 ציפער: 0, 1, 2, 3 ... 9 קאָנ מענ צונויפשטעלנ פאַנאַנדערשטעלונגענ צו דרײַ

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720;$$

אָבער פונ דער דאָזיקער צאָל דאַרפ מענ אויסשליסנ די צאָל פונ יענע פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 3, וועלכע הייבנ זיכ אָנ מיט דער ציפער 0. אַזוינע פאַנאַנדערשטעלונגענ זײַנענ דאָ־אַזויפיל, וויפל פאַנאַנדערשטעלונגענ צו 2 מע קאָנ צונויפשטעלנ פונ די 9 באַדײַטיקע ציפערנ, ד. ה.

$$9 \cdot 8 = 72;$$

פאָלגלעכ, איז די געזוכטע צאָל

$$720 - 72 = 648.$$

158. איבערשטעלונגען. אויב די פאנאנדערשטעלונגען פון m עלעמענטן זײַנען גענומען געוואָרן צו m (און אונטערשיידן זיך, הייסט עס, בלויז לויט דער אָרדענונג פון די עלעמענטן), ווערן זיי דעמלט אָנגערופן **איבערשטעלונגען**. צום בײַשפּיל, די איבערשטעלונגען פון 2 עלעמענטן a און b זײַנען פאנאנדערשטעלונגען פון 2 צו 2, ד. ה. ab און ba; איבערשטעלונגען פון 3 עלעמענטן זײַנען פאנאנדערשטעלונגען פון 3 צו 3, ד. ה. abc, acb, bac, bca, cab, cba א. ד. גל.

די צאָל מעגלעכע איבערשטעלונגען פון m עלעמענטן ווערט באַצייכנט דורך P_m (דאָ איז P דער ערשטער בוכשטאב פונעם פראנצויזישן וואָרט „permutation“, וואָס באַטײַט „איבערשטעלונג“).

צוליב דעם, וואָס די איבערשטעלונגען פון m עלעמענטן זײַנען פאנאנדערשטעלונגען פון m צו m, איז די **פאָרמולע פון די איבערשטעלונגען** אזא:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = 1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)m.$$

די צאָל פון אלע מעגלעכע איבערשטעלונגען פון m עלעמענטן איז גלײַך צו דעם פּראָדוקט פון די נאטורעלע צאָלן פון 1 ביז m.

159. אויפגאבעס. 1) וויפל נײַנציפערדיקע צאָלן קאָן מען אויפשרײַבן מיט דער הילף פון נײַן פארשיידענע באַדײַטיקע ציפער?

די געזוכטע צאָל איז

$$P_9 = 1\cdot 2\cdot 3\dots 9 = 362\,880.$$

2) אף וויפל אויפאנים קאָן מען פאנאנדערזעצן 12 פערזאָן ארום א טיש, אף וועלכן עס זײַנען געשטעלט 12 סערוויזן?

די צאָל אויפאנים איז גלײַך:

$$1\cdot 2\cdot 3\dots 12 = 479\,001\,600.$$

באמערקונג. דער פּראָדוקט פון די נאטורעלע צאָלן פון 1 ביז m אײַנשליסלעך (ווערט באַצייכנט פארקירצט אזוי: $m!$) וואקסט אויסערגעוויינלעך שנעל מיטן אויסוואקסן פונעם m; צום בײַשפּיל, $m = 12$ גיט דער פּראָדוקט 479 001 600, און בא $m = 100$ דריקט ער זיך אויס מיט א צאָל, וועלכע פאָדערט 158 ציפער אף אויפשרײַבן זי.

160. קאָמבינירונגען. אויב מיר זאָלן פון אלע פאנאנדערשטעלונגען, וועלכע מע קאָן צונויפשטעלן פון m עלעמענטן צו n, אָפּקלײַבן בלויז די, וועלכע זײַנען פארשיידן איינע פון דער אנדערער צום ווייניקסטנס אף איין עלעמענט, באקומען מיר אזוינע פאנאנדערשטעלונגען, וועלכע רופן זיך **קאָמבינירונגען**.

צום בײַשפּיל, פון 4 עלעמענטן a, b, c, און d וועלן זײַן קאָמבינירונגען צו 3:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

ווענ מיר זאַלנ אינ יעדערער פונ די דאָזיקע קאָמבינירונגענ מאַכנ אַלע מעגלעכע איבערשטעלונגענ, באַקומענ מיר אַלע מעגלעכע פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ די 4 עלע־מענטנ צו 3.

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

די צאָל פונ אַזוינע פאַנאַנדערשטעלונגענ איז גלײַכ:

$$6\cdot 4 = 24.$$

אפ אַזאַ אופנ איז די צאָל פונ אַלע פאַנאַנדערשטעלונגענ פונ m עלעמענטנ צו n גלײַכ צו דער צאָל פונ אַלע קאָמבינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו n, געקייפלט אפ דער צאָל פונ אַלע איבערשטעלונגענ, וועלכע מע קאָנ מאַכנ פונ n עלעמענטנ, ד. ה.

$$A_m^n = C_m^n P_n,$$

וווּ C_m^n באַטײַט די צאָל פונ אַלע קאָמבינירונגענ פונ m צו n (C איז דער ערשטער בוכשטאַב פונעמ פראַנצויזישנ וואָרט „*combinaison*“, וואָס באַטײַט „קאָמבינירונג“)

פונדאַנענ פירנ מיר אַרויס די פאָלגנדיקע פאָרמולע פונ קאָמבינירונגענ:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

צומ בײַשפּיל:

$$C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6, \qquad C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$$

א. ד. גל.

בײַשפּילנ.

1) פונ 10 קאַנדידאַטנ אפ דעמ זעלביקנ פּאָסט דאַרפנ ווערנ אויסגעקליבנ דרײַ. וויפל פאַרשיידענע פאַלנ פונ די וואַלנ קאָנענ זײַנ?

די געזוכטע צאָל איז, פאַרשטייט זיכ, די צאָל פונ אַלע מעגלעכע קאָמבינירונגענ פונ 10 עלעמענטנ צו 3, ד. ה.

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

2) אפ וויפל אופנימ קאָנ מענ אויסקלײַבנ 13 קאָרטנ פונ א טעשל פונ 52 קאָרטנ?

די געזוכטע צאָל שטעלט פאָר מיט זיכ די צאָל קאָמבינירונגענ פונ 52 צו 13, ד. ה.

$$C_{52}^{13} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\ldots 40}{1\cdot 2\ldots 13} = 635\,013\,559\,600.$$

161. א צווייטע פאָרם פונ דער פאָרמולע פונ קאָמבינירונגענ. די פאָרמולע פונ קאָמבינירונגענ קאָנ מענ ברענגענ צו אנ אנדער פאָרם, אויב מיר זאָלנ קייפלענ דעמ ציילער אונ דינטער אירנ אפנ פראָדוקט

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n);$$

דעמלט באקומענ מיר אינעמ ציילער דעמ פראָדוקט

$$m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n),$$

וועלכנ מע קאָנ, איבערשטעלנדיק די מיטקייפלער, אופשרייבנ אזוי:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)[m-(n-1)]\ldots m.$$

פאָלגלעכ:

$$C_m^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)\,m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)}=\frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

162. די אייגנשאפט פונ קאָמבינירונגענ. פארבײַטנדיק אינ דער דאָזיקער פאָרמולע דעמ n אפ $m-n$, באקומענ מיר:

$$C_m^{m-n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\frac{P_m}{P_{m-n}\cdot P_n}.$$

פארגלײַכנדיק די דאָזיקע פאָרמולע מיט דער פאָריקער, געפינענ מיר:

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

צו דעמ דאָזיקנ אויספיר דערפירט אזא פאָשעטע באטראכטונג: אויב פונ m עלע־מענטנ נעמענ מיר אראָפ וואָסערע עס איז n עלעמענטנ, קעדיי פונ זיי צונויפצו־שטעלנ איינ קאָמבינירונג, דעמלט שטעלנ צונויפ די געבליבענע עלעמענטנ איינ קאָמבינירונג פונ $m-n$ עלעמענטנ. אזוי ארומ האָבנ מיר, אז יעדער קאָמבינירונג פונ n עלעמענטנ אנטשפרעכט איינ קאָמבינירונג פונ $m-n$ עלעמענטנ, אונ אומגעקערט; הייסט דאָס:

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

די דאָזיקע צווישנבאציִונג דערלויבט צו פארייפאכנ דאָס געפינענ די צאָל קאָמ־בינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו n, אויב n שטײַגט אריבער $\frac{1}{2}m$. צומ בײַשפּיל:

$$C_{100}^{97}=C_{100}^{3}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161700.$$

געניטונגענ.

258. 5 שילער דארפנ זיצנ אפ איינ באנק. וויפל פארשיידענע אײַנטיילונגענ קאָנענ זײַנ אפ דער דאָזיקער באנק?

259. וויפל פירציפעריקע צאָלנ קאָנ מענ בילדנ פונ די ציפער 0; 1; 2; 3?

אָנווײַזונג. פונ דער צאָל אלערלייִקע איבערשטעלונגענ פונ די 4 ציפער דארפ מענ אראָפ־רעכענענ די צאָל איבערשטעלונגענ, וועלכע הייבנ זיכ אָנ מיט דעמ ציפער 0.

260. די לאגע פונ א פלאכ איגעמ רוימ ווערט באשטימט דורכ 3 פונקטנ. וויפל פארשיידענע פלאכנ קאָנ מענ דורכפירנ דורכ: 1) 4 פונקטנ; 2) 7 פונקטנ; 3) 10 פונקטנ; 4) n פונקטנ, אויב קײנע 3 פונקטנ ליגנ ניט אפ אײנ גראָדער אונ קײנע 4 פונקטנ ליגנ ניט אפ אײנ פלאכ?

261. עמעצער נעמט ארויס, ניט קוקנדיק, 4 קאָרטנ פונ א טעשל פונ 32 קאָרטנ. וויפל פארשײדענע פאלנ קאָנענ זײַנ דערבײַ?

262. וויפל קאָנ מענ מאכנ פונ די ציפסר 1; 2; 3; 4; 5; 6 איבערשטעלונגענ, וואָס הייבנ זיכ אָנ מיט דער ציפער 4? מיט די ציפער 45? מיט די ציפער 456?

263. אינ א גרופע זײַנענ פאראנ 32 שילער; 6 פונ זײ דארפ מענ זעצנ אפ דער ערשטער באנק. וויפל פאלנ קאָנענ דאָ סאכאקל זײַנ, אויב מע זאָל ניט ליינג קיינ אכט אפ דער אָרדענונג, אינ וועלכער די שילער זיצנ אפ דער באנק, נאָר בלויז אפ זײערע פאמיליעס?

II. ניוטאָנס בינאָמ.

163. פראָדוקט פונ בינאָמענ, וועלכע אונטערשײדנ זיכ בלויז מיט די צווײטע גלידער. דורכ אײנפאכנ קײפל געפינענ מיר:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

פונקט אזוי געפינענ מיר:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

באטראַכטנדיק די דאָזיקע קײפל־פראָדוקטנ, באמערקנ מיר, אז זײ זײַנענ אלע צונויפגעשטעלט לויט דעמ זעלביקנ געזעצ, נעמלעכ:

דער פראָדוקט שטעלט מיט זיכ פאָר א פילגליד, וואָס איז אויסגעשטעלט לויט די פאלנדיקע מאדרייגעס פונעמ בוכשטאב x.

דער וויַזער פונ ערשטנ גליד איז גלײַכ צו דער צאָל געקייפלטע בינאָמענ; די וויַזערס בא x פאלנ בעהאדראָגעדיק אפ אנ 1; דער לעצטער גליד אנטהאלט ניט קיינ x (ער אנטהאלט אים אינ דער נול־מאדרייגע).

דער קאָעפיציענט פונעמ ערשטנ גליד איז 1; דער קאָעפיציענט פונעמ צווייטנ גליד איז די סומע פונ אלע צווייטע גלידער פונ די געקייפלטע בינאָמענ; דער קאָעפיציענט פונעמ דריטנ גליד איז די סומע פונ אלע פראָדוקטנ פונ די צווייטע גלידער, גענומענ צו צוויי; דער קאָעפיציענט פונעמ פערטנ גליד איז די סומע פונ אלע פראָדוקטנ פונ די צווייטע גלידער, גענומענ צו דרײַ. דער לעצטער גליד איז דער פראָדוקט פונ אלע צווייטע גלידער.

מירנ דערווײַזנ, אז דער דאָזיקער געזעצ איז אָנווענדבאר צומ פראָדוקט פונ יעדער באליביקער צאָל בינאָמענ. צו דעמ צוועק לאָמיר זיכ אפריִער איבערצײַגנ, אז אויב ער איז ריכטיק פארנ פראָדוקט פונ m בינאָמענ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k),$$

איז ער אויכ ריכטיק פאַרנ פּראָדוקט פונ $(m+1)$ בינאָמענ:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots(x+k)\,(x+l).$$

הייסט דאָס, לאָמיר אָנעמענ, אַז עס איז ריכטיק די פאָלגנדיקע גלײַכקײַט:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m,$$

ווו מיר האָבנ צוליב קורצקײַט אָנגענומענ:

$$\begin{aligned}S_1&=a+b+c+\ldots+i+k\\S_2&=ab+ac+\ldots+ik\\S_3&=abc+abd+\ldots\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\S_m&=abc\ldots ik.\end{aligned}$$

לאָמיר קייפלענ ביידע טיילנ פונ דער גלײַכקײַט אפנ בינאָם $x+l$:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)(x+l)=(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+$$
$$+\ldots+S_m)(x+l)=x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\ldots+S_mx+lx^m+$$
$$+\ldots+lS_m=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+$$
$$+\ldots+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m.$$

באטראַכטנדיק דעמ דאָזיקנ נײַעמ פּראָדוקט, איבערצײַגנ מיר זיכ, אַז ער איז געבויט לויט דעמ זעלביקנ געזעצ, וועלכנ מיר האָבנ אָנגענומענ פאַר ריכטיק פאַר m בינאָמענ. אונ טאקע, עס גייענ, ערשטנס, נאָכ דעמ דאָזיקנ געזעצ די ווײַזערס פונ די בוכשטאבנ; צווייטנס, גייענ אויכ לויט אימ די קאָעפיציִענטנ, ווײַל דער קאָעפי־ציִענט פונ דער צווייטער צאָל S_1+l איז די סומע פונ אַלע צווייטע גלידער פונ די געקייפלטע בינאָמענ, אײַנשליסנדיק אויכ דעמ l, דער קאָעפיציִענט פונעמ דריטנ גליד S_2+lS_1, איז די סומע פונ די פּאָריקע פּראָדוקטנ פונ אַלע צווייטע גלידער, אײַנשליסנדיק אהער אויכ l, א. א. וו.; ענדלעכ איז lS_m דער פּראָדוקט פונ אַלע צווייטע גלידער:

$$a,\ b,\ c\ldots k,\ l.$$

מיר האָבנ געזענ, אַז דער דאָזיקער געזעצ איז ריכטיק פאַר פיר בינאָמענ; פאָלגלעכ, דארפ ער, לויט ווי מיר האָבנ איצט דערוויזנ, זײַנ ריכטיק אויכ פאַר $4+1$, ד. ה. פאַר פינפ בינאָמענ. אויב ווידער ער איז ריכטיק פאַר פינפ בינאָמענ, איז ער אויכ ריכטיק פאַר $5+1$, ד. ה. פאַר זעקס בינאָמענ, א.א.וו.

דער געבראַכטער גערדאַנקענגאַנג שטעלט פאָר אַנ אַזוי־גערופענעמ „באַווײַז פונ m צו $m+1$“. ער ווערט אויכ אָנגערופנ „מאַטעמאַטישע אינדוקציע“ (אָדער „פולקאָמע אינדוקציע“). מיר באַמערקנ דאָ, אַז אינ די פּאָריקע קאַפּיטלענ פונ דעמ דאָזיקנ בוכ האָבנ מיר ניט איינמאָל געהאַט די געלעגנהײַט אָנצווּוענדנ דעמ באַווײַז פונ m צו $m+1$ (צומ בײַשפּיל, באַמ אַרויספירנ די פאָרמולע פונ יעטוו־ידער גליד פונ א פּראָגרעסיע (§§ 66, 73 אונ אנד.). מיר האָבנ דאָס אָבער ניט געטאָנ, נאָר קעדיי צו מאַכנ איינפאַכער די דערקלערונג.

164. פאָרמולע פון ניוטאָנס בינאָם. לאָמיר אָנעמען, אז אין דער גלײַכ־קײַט, וואָס מיר האָבן באוויזן:

$$(x+a)(x+b)\dots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots+S_m$$

זײַנען אַלע צווייטע בינאָם־גלידער גלײַך, ד. ה., אז

$$a=b=c=\dots=k.$$

דעמלט וועט דער לינקער טייל זײַן די מאדרייגע פונעם בינאָם

$$(x+a)^m.$$

לאָמיר א קוק טאָן, אין וואָס עס פארוואנדלען זיך דעמלט די קאָעפיציענטן

$$S_1,\ S_2,\dots S_m.$$

דער קאָעפיציענט S_1, וועלכער איז גלײַך צו

$$a+b+c\ \dots+k,$$

פארוואנדלט זיך אין ma. דער קאָעפיציענט S_2, וועלכער איז גלײַך צו

$$ab+ac+ad+\dots,$$

פארוואנדלט זיך אין דער צאָל a^2, אזויפיל מאָל איבערגעכאזערט, וויפל קאָמביני־רונגען מע קאָן צונויפשטעלן פון m עלעמענטן צו 2, ד. ה. ער פארוואנדלט זיך אין

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2.$$

דער קאָעפיציענט S_3, וועלכער איז גלײַך צו

$$abc+abd+\dots,$$

פארוואנדלט זיך אין דער צאָל a^3, איבערגעכאזערט אזויפיל מאָל, וויפל קאָמביני־רונגען מע קאָן צונויפשטעלן פון m עלעמענטן צו 3, ד. ה. אין

$$\frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

א.א.וו. ענדלעך דער קאָעפיציענט S_m, וועלכער איז גלײַך צו

$$abc\dots k,$$

פארוואנדלט זיך אין a^m. אזוי ארום באקומען מיר דעמלט:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+$$
$$+\dots+\frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}a^nx^{m-n}+\dots+a^m.$$

די דאָזיקע גלײַכקײַט איז באַווּסט אַלס ניוטאָנס[1] בינאָם־פאָרמולע דער פילגליד, וואָס שטייט אינעם רעכטנ טייל פונ דער פאָרמולע, ווערט אָנגערופנ צעגלידערונג פונעם בינאָם. לאָמיר באַטראַכטנ די באַזונדערקײַטנ פונ דעם דאָזיקנ פילגליד.

165. די אייגנשאַפטנ פונ דער פאָרמולע פונ ניוטאָנס בינאָם. מיר וועלנ אָנווײַזנ פאָלגנדיקע 10 אייגנשאַפטנ:

1) די ווײַזערס פונעם בוכשטאַב x פאַרקלענערנ זיכ בעהאַדראָגעדיק אַפּ אַנ 1 פונ ערשטנ גליד צום לעצטנ, דערבײַ איז אינעם ערשטנ גליד דער ווײַזער פונעם x גלײַכ צו דעם מאַדרייגע־ווײַזער פונעם בינאָם, אונ אינעם לעצטנ איז ער 0; פאַרקערט, די ווײַזערס פונעם בוכשטאַב a פאַרגרעסערנ זיכ בעהאַדראָגעדיק אַפּ אַנ 1 פונ ערשטנ גליד צום לעצטנ, דערבײַ איז אינעם ערשטנ גליד דער ווײַזער באַם a 0, אונ אינעם לעצטנ איז ער גלײַכ צו דעם מאַדרייגע־ווײַזער פונעם בינאָם. צוליב דעם איז די סומע פונ די ווײַזערס באַ x אונ a באַ יעדנ גליד איינע אונ די זעלביקע נעמלעכ: זי איז גלײַכ צו דעם מאַדרייגע־ווײַזער פונעם בינאָם.

2) די גאַנצע צאָל גלידער פונ דער צעגלידערונג איז $m+1$, ווײַל די צעגלידערונג אַנטהאַלט אַלע מאַדרייגעס פונעם a פונ 0 ביז m אײַנשליסלעכ.

3) די קאָעפיציענטנ זײַנענ גלײַכ: באַם ערשטנ גליד—איינס, באַם צווייטנ גליד—דער מאַדרייגע־ווײַזער פונעם בינאָם, באַם דריטנ גליד—די צאָל קאָמבינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו 2, באַם פערטנ גליד—די צאָל קאָמבינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו 3; ביכלאַל איז דער קאָעפיציענט פונ $(n+1)$־טנ גליד די צאָל קאָמבינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו n. ענדלעכ איז דער קאָעפיציענט פונעם לעצטנ גליד גלײַכ צו דער צאָל קאָמבינירונגענ פונ m עלעמענטנ צו m, ד. ה. צו 1.

מיר באַמערקנ דאָ, אַז די דאָזיקע אַלע קאָעפיציענטנ ווערנ אָנגערופנ בינאָמיאַלע.

4) באַצייכענענדיק יעדנ גליד פונ דער צעגלידערונג דורכנ בוכשטאַב T מיט אַ ציפער פונונטנ, וואָס ווײַזט דעם נומער פונעם אָרט פונ דעם דאָזיקנ גליד אינ דער צעגלידערונג, ד. ה. דעם ערשטנ גליד דורכ T_1, דעם צווייטנ דורכ T_2 א.א.וו., קאָנענ מיר אופשרײַבנ:

$$T_{n+1}=C_m^n a^n x^{m-n}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

די דאָזיקע פאָרמולע דריקט אויס דעם אַלגעמיינעמ גליד פונ דער צעגלידערונג, ווײַל פונ איר קאָנענ מיר באַקומענ אַלע גלידער (כוצנ ערשטנ), שטעלנדיק אַפּנ אָרט פונעם n די צאָלנ: 1, 2, 3 ...m.

5) דער קאָעפיציענט פונעם ערשטנ גליד פונ אָנהייב פונ דער צעגלידערונג איז גלײַכ צו איינס, דער קאָעפיציענט פונעם ערשטנ גליד פונ סאָפּ איז אויכ

---

[1]) איסאַק ניוטאָנ — דער באַרימטער ענגלישער מאַטעמאַטיקער, געלעבט פונ יאָר 1642 ביז 1727. די פאָרמולע פונ בינאָם ניט נאָר פאַר m גאַנצע פּאָזיטיווע, נאָר אויכ פאַר m נעגאַטיווע אונ ברוכצאָלנ האָט ער אָנגעוויזנ אינ יאָר 1665, נאָר קיינ שטרענגנ באַווײַז פונ איר האָט ער ניט געגעבנ. פאַר גאַנצע פּאָזיטיווע ווײַזערס איז די פאָרמולע צום ערשטנ מאָל דערוויזנ געוואָרנ דורכ יאַקאָב בערנולי (1645—1705) מיט דער הילפ פונ דער טעאָריע פונ פאַרייניקונגענ.

גלײַך צו אײנס. דער קאָעפיציִענט פונעם צװײטן גליד פון אָנהײב איז m, ד. ה. C_m^1;
דער קאָעפיציִענט פונעם צװײטן גליד פון סאָפ איז C_m^{m-1}; אָבער אַזױװי

$$C_m^1 = C_m^{m-1} \quad (120\ \S),$$

זײַנען די דאָזיקע קאָעפיציִענטן גלײַך. דער קאָעפיציִענט פונעם דריטן גליד פון אָנהײב איז C_m^2, און פונעם דריטן גליד פון סאָפ איז C_m^{n-2}; אָבער

$$C_m^2 = C_m^{m-2},$$

דעריבער זײַנען די דאָזיקע קאָעפיציִענטן אױך גלײַך, א.א.װ. הײסט דאָס:

די קאָעפיציִענטן פון גלידער, װעלכע זײַנען גלײַך דערװײַטערט פון די עקן פון דער צעגלידערונג, זײַנען גלײַך צװישן זיך.

6) באַטראַכטנדיק די בינאָמיאַלע קאָעפיציִענטן:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ldots,$$

באַמערקן מיר, אַז באַם איבערגאַנג פון אײן קאָעפיציִענט צום פאָלגנדיקן װערן די צײלערס געקײפלט אַף אַלץ קלענערע און קלענערע צאָלן (אַפ $m-1$, אַפ $m-2$, אַפ $m-3$ א.א.װ.), און די דײַטערס װערן געקײפלט אַף אַלץ גרעסערע און גרעסערע צאָלן (אַפ 2, אַפ 3, אַפ 4 א.א.װ.). צוליב דעם שטײַגן אַפריִער די קאָעפיציִענטן (װי לאַנג די קײפלער אינעם צײלער בלײַבן גרעסער, אײדער די אַנטשפּרעכנדיקע קײפלער אינעם װײַזער), און דערנאָך פאַלן זײ. אַזױװי די קאָעפי-ציִענטן פון די גלידער, װאָס שטײען אין אַ גלײַכער מאָס אָפּ פון די עקן פון דער צעגלידערונג, זײַנען גלײַך, מוז זיך דער גרעסטער קאָעפיציִענט געפינען אינמיטן פון דער צעגלידערונג. און אױב די צאָל פון אַלע גלידער פון דער צעגלידערונג איז אַן אומגראָדע (װאָס עס קומט פאָר, װען דער װײַזער פונעם בינאָם איז אַ גראָדער), קומט דערבײַ אױס אינמיטן אײן גליד מיטן גרעסטן קאָעפיציִענט; אױב אָבער די צאָל פון אַלע גלידער איז אַ גראָדע (װאָס עס קומט פאָר, װען דער װײַזער פונעם בינאָם איז אַן אומגראָדער), מוזן זײַן אינמיטן צװײ גלידער מיט גלײַכע גרעסטע קאָעפיציִענטן. צום בײַשפּיל:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

7) פון אַ פאַרגלײַך פון צװײ גלידער, װאָס שטײען אײנער לעבן אַנדערן:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^n x^{m-n};$$

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}$$

מאַכן מיר דעם אױספיר:

קעדײ צו באַקומען דעם קאָעפיציִענט פון דעם פאָלגנדיקן גליד, איז גענוג צו קײפלען דעם קאָעפיציִענט פון דעם פריִערדיקן גליד אַפן װײַזער פונעם בוכשטאַב x און צעטײלן אַפ דער צאָל גלידער ביז דעם, װאָס מיר דאַרפן אױסרעכענען.

באנוצנדיק זיך מיט דער דאָזיקער אייגנשאפט, קאָן מען גלײַך שרײַבן, צום בײַשפּיל:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6...$$

מיר נעמען איצט דעם 7, קייפלען אים אפ 6 און טיילן אפ 2, באקומען מיר 21:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5...$$

איצט נעמען מיר די 21, קייפלען זיי אפ 5 און טיילן אפ 3, באקומען מיר 35:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4...$$

איצט זײַנען שוין אויסגעשריבן די גלידער ביזן מיטן פון דער ריי, די איבעריקע באקומען מיר, שטיצנדיק זיך אפ דער פינפטער אייגנשאפט:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

8) די סומע פון אלע בינאָמיאַלע קאָעפיציענטן איז גלײַך 2^m.

און טאקע אזוי, אָנעמענדיק אין דער פאָרמולע פונעם בינאָם

$$x=a=1,$$

באקומען מיר:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+1.$$

צום בײַשפּיל, די סומע פון די קאָעפיציענטן אין דער צעגלידערונג $(x+a)^7$ איז גלײַך:

$$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7.$$

9) פארבײַטנדיק אין דער פאָרמולע פונעם בינאָם דעם a אפ $-a$, באקומען מיר:

$$(x-a)^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{m-2}+\dots+(-a)^m,$$

ד. ה.

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+\dots+(-1)^m a^m,$$

פאָלגלעך, עס בײַטן זיך אין דער ריי די צייכנס $+$ און $-$.

10) אויב מיר נעמען אָן אין דער לעצטער גלײַכקײַט

$$x=a=1,$$

געפינען מיר:

$$0=1-m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+(-1)^m.$$

די סומע פון די בינאָמיאַלע קאָעפיציענטן, וואָס שטייען אפ אומגראָדע ערטער, איז גלײַך צו דער סומע פון די בינאָמיאַלע קאָעפיציענטן, וואָס שטייען אפ גראָדע ערטער.

166. אָנווענדונג פונ דער פאָרמולע פונ בינאָמ צו א פילגליד. די פאָרמולע פונ ניוטאָנס בינאָמ דערלויבט צו דערהייבנ אינ א מאדרייגע א דרייגליד אונ בכלל א פילגליד. אזוי:

$$(a+b+c)^4=[(a+b)+c]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+$$
$$+4c^3(a+b)+c^4.$$

צעגלידערנדיק, $(a+b)^4,\ (a+b)^3,\ (a+b)^2$

באקומענ מיר ענדגילטיק:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc+$$
$$+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

גענִיטונגענ.

געפינט לויט דער פאָרמולע פונ ניוטאָנס בינאָמ:

264. $(1+x)^6;\ (x+3)^5;\ (x-1)^7.$ 265. $(2-a)^8,\ (3x+4y)^6;\ (1+x)^m.$

266. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5;\ \ (x^2+2y^2)^4;\ \ (3a^2-2b^2)^6.$

267. געפינט דעמ 6־טנ גליד פונ דער צעגלידערונג $(5x^2-6a^2)^{10}.$

268. געפינט דעמ 8־טנ גליד פונ דער צעגלידערונג $(3a-2)^{12}.$

רעכנט אויס:

269. $2{,}1^6=\left(2+\frac{1}{10}\right)^6=\dots$ 270. $1{,}03^5=\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=\dots$

271. $0{,}97^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4=\dots$ 272. $29^5=(30-1)^5=\dots$

273. $99^3=(100-1)^3=\dots$

274. $(4+\sqrt{3})^6;\ (6-5\sqrt{2})^5.$ 275. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4;\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^3.$

276. $(1+\sqrt{3})^8;\ (2\sqrt{2}+\sqrt{6})^6.$

277. אינ דער צעגלידערונג $\left(x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ רעכנט אויס דעמ גליד, וואָס אנטהאלט ניט קיינ x.

278. דאָס זעלביקע אינ דער צעגלידערונג $\left(2x^2-\frac{a}{2x^3}\right)^{10}.$

III. געשטאפּלטע ברוכצאָלנ.

167. דעפיניציע פונ געשטאפּלטע ברוכצאָלנ. געשטאפּלטע, אָדער געקייטלטע ברוכצאָלנ, װערנ אָנגערופנ ברוכצאָלנ פונ דער פאָרמ:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}},$$

װו די גאנצע צאָל a לייגט מענ צונויפ מיט א ברוכצאָל, בא װעלכער דער ציילער איז אנ 1 אונ דער דײַטער איז די גאנצע צאָל a_1, צונויפגעלייגט מיט א ברוכצאָל־בא װעלכער דער ציילער איז 1 אונ דער דײַטער איז די גאנצע צאָל a_2, צונויפגעלייגט מיט א ברוכצאָל.... א. א. װ. (אלע גאנצע צאָלנ װערנ אָנגענומענ פאר פּאָזיטיװע).

די ברוכצאָלנ $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ א. א. װ. װערנ אָנגערופנ צונויפשטעלנדיקע ברוכצאָלנ אָדער רינגענ. א געשטאפּלטע ברוכצאָל װערט אָנגערופנ ענדלעכע אָדער אומענדלעכע לויט דעמ, צי די צאָל רינגענ אירע איז אנ ענדלעכע אָדער אנ אומענדלעכע. מיר װעלנ באטראכטנ בלויז ענדלעכע ברוכצאָלנ.

די אויבנ אופגעשריבענע געשטאפּלטע ברוכצאָל באצייכנט מענ געקירצט אָט אזוי:

$$(a,\ a_1,\ a_2\ a_3 \ldots).$$

צומ בײַשפּיל, די ברוכצאָלנ:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$$

װערנ פארקירצט אופגעשריבנ: $(3,\ 2,\ 1,\ 3)$ אונ $(0,\ 2,\ 1{,}17)$

168. פארװאנדלענ ענדלעכע געשטאפּלטע ברוכצאָלנ אינ געװיינלעכע. יעטװידער ענדלעכע געשטאפּלטע ברוכצאָל קאָנ מענ פארװאנדלענ אינ א געװיינלעכער; אפ דעמ איז גענוג צו מאכנ לויט די קלאָלימ פונ אריפמעטיק אלע אקטנ, װעלכע זײַנענ אָנגעװיזנ אינ דער באצייכענונג פונ די געשטאפּלטע ברוכצאָלנ. לאָמיר זאָגנ, צומ בײַשפּיל, אז מיר האָבנ אזא ברוכצאָל:

$$(2,\ 3,\ 1,\ 4)=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$$

מאכנ מיר די אָנגעװיזענע רעכנאקטנ:

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4};\ 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5};\quad 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5};\quad 1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19};\quad 2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}.$$

דאָס איז א געװיינלעכע ברוכצאָל, װעלכע שטעלט פאָר דעמ פּינקטלעכנ באטרעפ פונ דער געגעבענער געשטאפּלטער.

169. פארוואנדלענ געוויינלעכע ברוכצאָלנ אינ ענדלעכע געשטאפלטע. פארקערט, יעטווידער געוויינלעכע ברוכצאָל קאָנ מענ פארוואנדלענ אינ אנ ענדלעכער געשטאפלטער. לאָמיר זאָגנ, צום ביישפּיל, אז עס איז געגעבנ די ברוכצאָל $\frac{A}{B}$. ווענ מיר שליסנ אויס פונ איר די גאנצע צאָל, באקומענ מיר:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B},$$

וווּ a איז דער גאנצער טיילוועדט, אונ r איז דער רעשט פונ טיילנ A אפ B (אויב די ברוכצאָל $\frac{A}{Б}$ איז אנ עכטע, איז $a=0$ אונ $r=A$).

צעטיילנדיק ביידע טיילנ פונ דער ברוכצאָל $\frac{r}{B}$ אפ r, באקומענ מיר:

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}},$$

וווּ a_1 איז דער גאנצער טיילווערט, אונ r_1 איז דער רעשט פונ טיילנ B אפ r.

צעטיילנדיק ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל $\frac{r_1}{r}$ אפ r_1, באקומענ מיר:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}},$$

וווּ a_2 איז דער גאנצער טיילווערט, אונ r_2 איז דער רעשט פונ טיילנ r אפ r_1. פאָרזעצנדיק ווייטער דעם דאָזיקנ גאנג, וועלנ מיר בעהאדראָגעדיק באקומענ:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}};\qquad \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}}$$

א. א. וו.

אזוי-ווי

$$B>r>r_1>r_2>r_3\ldots,$$

איז, ווענ מיר זעצנ פאָר גענוג ווייט דעם דאָזיקנ גאנג, איז קלאָר, אז מיר קומענ צו א געוויסנ רעשט, וועלכער וועט זיינ גלייכ צו 0. לאָמיר זאָגנ $r_n=0$, ד. ה.

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}.$$

דעמלט באקומענ מיר דורכ אונטערשטעלנ:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+\frac{1}{a_n}}}.$$

באמערקונג. פונעם באטראכטנ דעם דאָזיקנ גאנג איז געדרונגענ, אז a, a_1, $a_2 \ldots a_n$ זיינענ גאנצע טיילווערטנ, וואָס ווערנ באקומענ פונ בעהאדראָגעדיקנ טיילנ A אפ B, דערנאָכ B אפנ ערשטנ רעשט, דעם ערשטנ רעשט אפנ צווייטנ א. א. וו.; אנ-

דערש גערעדט, דאָס זײַנען גאַנצע טײלװערטן, װאָס װערן באַקומען באַם געפֿינען דעם געמײנזאַמען גרעסטן טײלער צװישן A און B דורכן מיטל פֿון בעהאַדראָגעדיקן כילעק. צוליב דעם װערן די צאָלן a, a_1, a_2, ... a_n אָנגערופֿן טײלװערטן פֿון א געשטאַפּלטער ברוכצאָל.

בײַשפּילן:

1. פֿאַרװאַנדלט אין א געשטאַפּלטער ברוכצאָל די צאָל $\frac{40}{17}$.

אזוי װי:

$$\begin{array}{rrrr} & & 40 & | \; 17 \\ & 17 & | \; 6 & 2 \\ 6 & | \; 5 & 2 & \\ 5 \; | \; 1 & 1 & & \\ 0 \;\; 5 & & & \end{array}$$

איז

$$\frac{40}{17}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$$

2. פֿאַרװאַנדלט אין א געשטאַפּלטער ברוכצאָל די צאָל $\frac{7}{120}$.

אזוי װי:

$$\begin{array}{rrrr} & & 7 & | \; 120 \\ & 120 & | \; 7 & 0 \\ 7 & | \;\; 1 & 17 & \\ 0 & 7 & & \end{array}$$

, איז

$$\frac{7}{120}=\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{7}}.$$

170. רעדוצירטע ברוכצאָלן. װען מיר נעמען אין א געשטאַפּלטער ברוכצאָל עטלעכע רינגען פֿון אָנהײב, אָפּװאַרפֿנדיק אַלע איבעריקע, און פֿאַרװאַנדלען די געשטאַפּלטע ברוכצאָל, װאָס זײ האָבן צונױפֿגעשטעלט, אין א געװײנלעכער, באַקומען מיר אַן אזוי גערופֿענע רעדוצירטע ברוכצאָל. די ערשטע רעדוצירטע ברוכצאָל באַקומט זיך, װען מיר נעמען אײן ערשטן רינג; די צװײטע — װען מיר נעמען צװײ ערשטע רינגען א. א. װ. אַפּ אזא אופֿן איז פֿאַר דער געשטאַפּלטער ברוכצאָל:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

די ערשטע רעדוצירטע ברוכצאָל איז $\frac{3}{1}$;

די צװײטע „ „ „ $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$;

די דריטע „ „ „ $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{10}{3}$

די פֿערטע רעדוצירטע ברוכצאָל װעט אין דעם דאָזיקן בײַשפּיל פֿאָרשטעלן די פּינקטלעכע גרײס פֿון דער געשטאַפּלטער ברוכצאָל $\frac{27}{8}$.

װען אין דער געשטאַפּלטער ברוכצאָל איז ניטאָ קײן גאַנצע צאָל, איז די ערשטע רעדוצירטע ברוכצאָל 0.

171. געזעצ פונ צונויפשטעלנ רעדוצירטע ברוכצאָלנ. לאָמיר צונויפ־צשטעלנ פאר דער געשטאפלטער ברוכצאָל $(a, a_1, a_2, \dots a_n)$ די ערשטע דרײַ רעדוצירטע ברוכצאָלנ:

$$1)\ \frac{a}{1}\ ;\ 2)\ a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1};$$

$$3)\ a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1}.$$

פארגלײַכנדיק די דריטע רעדוצירטע ברוכצאָל מיט די צוויי ערשטע, באמערקנ מיר, אז דער ציילער פונ דער דריטער רעדוצירטער ברוכצאָל באקומט זיכ, ווענ מיר קייפלענ דעמ ציילער פונ דער צווייטער רעדוצירטער ברוכצאָל אפנ אנטשפרע־כיקנ טיילווערט (ד. ה. אפ a_2) אונ מיר דערלייגנ צומ באקומענעמ פראָדוקט דעמ ציילער פונ דער ערשטער רעדוצירטער ברוכצאָל; דער דײַטער פונ דער דריטער רעדוצירטער ברוכצאָל באקומט זיכ אפ אנ ענלעכנ אויפנ פונ די דײַטערס פונ די פריערדיקע צוויי רעדוצירטע ברוכצאָלנ.

לאָמיר באווײַזנ, אז דער דאָזיקער געזעצ איז אָנווענדבאר צו יעטווידער רעדוצירטער ברוכצאָל, וואָס גייט נאָכ דער דריטער, ד. ה. מירנ דערווײַזנ, אז ביכלאל באקומט זיכ דער ציילער פונ דער $(n+1)$-טער רעדוצירטער ברוכצאָל, ווענ מיר קייפלענ דעמ ציילער פונ דער n-טער רעדוצירטער ברוכצאָל אפנ אנטשפרעכנדיקנ טיילווערט (ד. ה. אפ a_n) אונ מיר דערלייגנ צומ פראָדוקט דעמ ציילער פונ דער $(n-1)$-טער רעדוצירטער ברוכצאָל, אונ אז דער דײַטער פונ דער $(n+1)$-טער רעדוצירטער ברוכצאָל באקומט זיכ אפ אנ ענלעכנ אויפנ פונ די דײַטערס פונ n-ער אונ $(n-1)$-טער רעדוצירטע ברוכצאָלנ. מיר וועלנ באנוצנ דעמ באווײַז פונ n צו $(n+1)$, ד. ה. מיר וועלנ באווײַזנ, אז אויב דער דאָזיקער געזעצ איז אָנווענדבאר צו דער n-ער רעדוצירטער ברוכצאָל, איז ער אָנווענדבאר אויכ צו דער $(n+1)$-טער רעדוצירטער ברוכצאָל.

לאָמיר באצייכענענ די ערשטע, צווייטע, דריטע א. א. וו. רעדוצירטע ברוכצאָלנ בעהאדראָגעדיק דורכ

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}\dots\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

אונ באמערקנ, אז די אנטשפרעכנדיקע טיילווערטנ וועלנ זײַנ:

$$a,\ a_1,\ a_2,\dots\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n\ .$$

לאָמיר אָנעמענ, אז די גלײַכקײַטנ:

$$P_n=P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2};\quad Q_n=Q_{n-1}\,a_{n-1}+Q_{n-2}, \tag{1}$$

זײַנענ ריכטיק, אונ פאָלגלעכ, איז:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}\,a_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,a_{n-1}+Q_{n-2}}. \tag{2}$$

פאָדערט זיך צו דערווייַזונג, אז אינ דעם פאַל איז אויך

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n a_n+P_{n-1}}{Q_n a_n+Q_{n-1}}. \qquad (3)$$

פונ פארגלייַכנ צוויי רעדוצירטע ברוכצאָלנ:

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}}} \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}$$

זעענ מיר, אז די $(n+1)$־טע רעדוצירטע ברוכצאָל באקומט זיך פונ דער n־ער, אויב מיר וועלנ אינ דער לעצטער פארבייַטנ די צאָל a_{n-1} אפ דער סומע $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$. דעריבער גיט די גלייַכקייַט (2):

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-2}}.$$

עפענענדיק די קלאמערנ אונ קייפלענדיק ביידע גלידער פונ דער ברוכצאָל אפ a_n, באקומענ מיר:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}.$$

נעמענדיק אינ אכט די גלייַכקייַט (1), קענענ מיר ענדגילטיק אופשרייַבנ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n a_n+P_{n-1}}{Q_n a_n+Q_{n-1}}.$$

דאָס איז די גלייַכקייַט (3), וועלכע עס האָט זיך געפאָדערט צו דערווייַזנ.

אפ אזא אופנ, אויב דער געזעצ, וועלכער ווערט דאָ דערוויזנ, איז ריכטיק פאַר דער n־ער רעדוצירטער ברוכצאָל, איז ער אויך ריכטיק פאַר דער $(n+1)$־ער רעדוצירטער ברוכצאָל. אָבער מיר האָבנ אומיטלבאר געזענ, אז ער איז ריכטיק פאַר דער דריטער רעדוצירטער ברוכצאָל; פאָלגלעך, איז ער, לויט ווי עס איז דערוויזנ געוואָרנ, אָנווענדבאר פאַר דער פערטער רעדוצירטער ברוכצאָל; אונ אויב פאַר דער פערטער, איז אויך פאַר דער פינפטער א. א. וו.

באנוצנדיק זיך מיט דעם דאָזיקנ געזעצ, שטעלנ מיר צונויפ אלע רעדוצירטע ברוכצאָלנ פארנ ווייַטערדיקנ בייַשפּיל:

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5).$$

די אויסרעכענונג איז באקוועמער פונ אלצ צו צעשטעלנ אזוי:

		3	2	3	1	5
2	3	11	25	86	111	641
1	1	4	9	31	40	231

די ערשטע צוויי רעדוצירטע ברוכצאָלנ געפינענ מיר דירעקט; דאָס זײַנענ: $\frac{2}{1}$ אונ $\frac{3}{1}$. די איבעריקע רעדוצירטע ברוכצאָלנ באקומענ מיר, באזירנדיק זיכ אפנ דערוויזענעם געזעצ. קעדיי צו פארגעדענקענ, צעשטעלנ מיר אינ דער אויבערשטער שורע די גאנצע טײלווערטנ, פונ דריטנ ביזנ לעצטנ.

172. טעאָרעמע 1. דער גענויער באטרעפ פונ אנ ענדלעכער געשטאפלטער ברוכצאָל געפינט זיכ צווישנ צוויי נאָכאנאנדיקע רעדוצירטע ברוכצאָלנ, דערבײַ איז ער נעענטער צו דער ווײַטערדיקער, איידער צו דער פריערדיקער.

באווײַז. לאָמיר אָנעמענ, אז מיר האָבנ אנ ענדלעכע געשטאפלטע ברוכצאָל

$$(a,\ a_1,\ a_2 \dots a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1} \dots a_s) = A,$$

די פינקטלעכע גרייס פונ דער דאָזיקער ברוכצאָל באצייכענענ מיר דורכ A. נעמענ מיר וועלכע עס איז דרײַ נאָכאנאנדיקע רעדוצירטע ברוכצאָלנ:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad \frac{P_n}{Q_n},\quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

לויט ווי עס איז דערוויזנ געוואָרנ אינ פאָריקנ פאראגראפ, האָבנ מיר:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

אויב מיר וועלנ אינעם רעכטנ טייל פונ דער דאָזיקער גלײַכקײַט אָנשטאָט a_n ארײַנשטעלנ

$$y = (a_n,\ a_{n+1} \dots a_s),$$

באקומענ מיר אינעם לינקנ טייל די פינקטלעכע גרייס A פונ דער געשטאפלטער ברוכצאָל, הייסט דאָס:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}.$$

פונדאנען איז:

$$AQ_ny+AQ_{n-1}=P_ny+P_{n-1},$$

אָדער

$$AQ_ny-P_ny=P_{n-1}-AQ_{n-1}.$$

און, הייסט עס,

$$yQ_n\left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)=Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right).$$

פון דער לעצטער גלײַכקײַט קאָנען מיר מאכן פאָלגנדיקע צוויי אויספירן:

1) אזוי־ווי די צאָלן y, Q_n און Q_{n-1} זײַנען פּאָזיטיוו, דארפן די דיפערענצן, וואָס שטייען אין די קלאמערן, זײַן גלײַכצײַטיק פּאָזיטיוו אָדער גלײַכצײַטיק נעגאַטיוו; דאָס הייסט: אויב

$$A-\frac{P_n}{Q_n}>0,$$

איז אויך

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A>0;$$

אָדער אויב

$$A-\frac{P_n}{Q_n}<0$$

איז אויך

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A<0;$$

ד. ה. אויב

$$A>\frac{P_n}{Q_n},$$

איז אויך

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}>A;$$

אָדער אויב

$$A<\frac{P_n}{Q_n},$$

איז אויך

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<A.$$

פאָלגלעך, איז A פאראן צווישן יעטווידערע צוויי נאָכאנאנדיקע רעדוצירטע ברוכצאָלן.

2) אזוי־ווי $y>1$ און $Q_n>Q_{n-1}$, דערבײַ זײַנען די צאָלן Q_n און Q_{n-1} פּאָזיטיוו, מאכן מיר פון דער זעלביקער גלײַכקײַט דעם אויספיר, אז:

די אבסאָליוטע גרייס $\left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)$ איז קלענער פון דער אבסאָליוטער גרייס

$$\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right).$$

פונדאנענ איז דער אויספיר, אז $\frac{P_n}{Q_n}$ איז נעענטער צו A, איידער $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, וואָס עס האָט זיכ געפאָדערט צו באווײַזנ.

באמערקונג: אזויווי $A > a$ ד. ה.

$$A > \frac{P_1}{Q_1},$$

איז

$$A < \frac{P_2}{Q_2};\quad A > \frac{P_3}{Q_3};\quad A < \frac{P_4}{Q_4}$$

א. א. וו.

דער פינקטלעכער באטרעפ פונ א געשטאפּלטער ברוכצאָל איז גרעסער פונ יעט־ווידער רעדוצירטער ברוכצאָל פונ אומגראָדער אָרדענונג אונ קלענער פונ יעטווידער רעדוצירטער ברוכצאָל פונ גראָדער אָרדענונג.

173. טעאָרעמע 2. די דיפערענצ צווישנ צוויי איינע לעבנ דער אנדערער שטייענדיקע רעדוצירטע ברוכצאָלנ איז גלײַכ צו ± 1, געטיילט אפנ פּראָדוקט פונ די דײַטערס פונ די דאָזיקע רעדוצירטע ברוכצאָלנ.

באווײַז. אזויווי:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}},$$

איז קלאָר, אז דער דײַטער פונ דער דאָזיקער דיפערענצ באפרידיקט די פאָדערונגענ פונ דער טעאָרעמע. בלײַבט איבער צו באווײַזנ, אז דער ציילער איז גלײַכ צו ± 1.

אזויווי

$$P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1} \quad \text{אונ} \quad Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1},$$

איז:

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (P_na_n + P_{n-1})Q_n - P_n(Q_na_n + Q_{n-1}) =$$
$$= P_nQ_na_n + P_{n-1}Q_n - P_nQ_na_n - P_nQ_{n-1} = -(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n).$$

דער אויסדרוק, וואָס שטייט אינ די קלאמערנ, שטעלט מיט זיכ פאָר דעם ציילער פונ דער ברוכצאָל, וועלכע באקומט זיכ פונ אראָפּנעמענ פונ $\frac{P_n}{Q_n}$ די ברוכצאָל $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

פאָלגלעכ, האָבנ מיר דערוויזנ, אז די אבסאָליוטע גרייס פונעם ציילער פונ דער ברוכצאָל, וואָס ווערט באקומענ פונ אראָפּנעמענ $\frac{P_n}{Q_n}$ פונ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, איז גלײַכ צו דער אבסאָליוטער גרייס פונ דער ברוכצאָל, וואָס ווערט באקומענ פונ אראָפּנעמענ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ פונ $\frac{P_n}{Q_n}$, מיט אנדערע ווערטער, די אבסאָליוטע גרייס פונעם ציילער פונ דער ברוכצאָל, וואָס ווערט באקומענ פונעם אראָפּנעמענ איינע פונ דער צווייטער צוויי רעדוצירטע ברוכצאָלנ, וואָס שטייענ איינע לעבנ דער אנדערער, איז א שטענ־

דיקע גרייס פאר אלע רעדוצירטע ברוכצאָלן. אָבער די דיפערענץ צווישן דער צווייטער און ערשטער רעדוצירטער ברוכצאָל איז:

$$\left(a+\frac{1}{a_1}\right)-a=\frac{1}{a_1}.$$

פאָלגלעך, איז דער ציילער פון דער דיפערענץ צווישן יעטווידערע צוויי איינע לעבן דער אנדערער שטייענדיקע רעדוצירטע ברוכצאָלן לויט זיין אבסאָליוטער גרייס גלייך צו ± 1.

אזוי, אשטייגער, ווען מע זאָל נעמען דעם ביישפּיל, וואָס איז געבראכט אין § 171, געפינען מיר:

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{1}=\frac{1}{1};\quad \frac{11}{4}-\frac{3}{1}=-\frac{1}{4};\quad \frac{25}{9}-\frac{11}{9}=\frac{1}{36};\quad \frac{86}{31}-\frac{25}{9}=-\frac{1}{279}$$

א. א. וו.

אויספירן. 1. יעדער רעדוצירטע ברוכצאָל איז ניט קיין פארקירצבארע, ווייל, אויב מע וואָלט $\frac{P_n}{Q_n}$ געקענט פארקירצן אף א וועלכן עס איז טיילער $m>1$, וואָלט

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n$$

זיך געטיילט אף m, וואָס עס איז ניט מעגלעך, ווייל די דאָזיקע דיפערענץ איז גלייך צו ± 1.

2. אויב מיר זאָלן אָנשטאָט דער פּינקטלעכער גרייס פון א געשטאפּלטער ברוכצאָל נעמען די רעדוצירטע ברוכצאָל $\frac{P_n}{Q_n}$, וועלן מיר מאכן א פעלער, א קלענערן פון יעדערער פון די דריי פאָלגנדיקע צאָלן:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}};\quad \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})};\quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

אינדערעמעסן, אויב A איז דער פּינקטלעכער באטרעף פון דער געשטאפּלטער ברוכצאָל, איז

$$A-\frac{P_n}{Q_n}$$

לויט דער צאָל קלענער פון דער דיפערענץ

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n},$$

וואָס די אבסאָליוטע גרייס אירע איז, לויט ווי עס איז באוויזן געוואָרן, גלייך צו $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$. פון דער צווייטער זייט, אזוי ווי

$$Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n-1},$$

ווי $a>1$, איז

$$Q_{n+1}\geqslant Q_n+Q_{n-1},$$

און פאָלגלעך:

$$Q_nQ_{n+1}\geqslant Q_n(Q_n+Q_{n-1})$$

און

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

און דעריבער איז די אבסאָליוטע גרייס פֿון דער דיפֿערענץ $A-\frac{P_n}{Q_n}$ קלענער פֿון

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}.$$

ענדלעך, אַזוי ווי

$$Q_{n+1} > Q_n,$$

איז

$$Q_{n+1}Q_n > Q_n^2$$

און דעריבער איז

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

פֿאָלגלעך, איז די אבסאָליוטע גרייס פֿון דער דיפֿערענץ

$$A-\frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

פֿון די דריי אָנגעוויזענע גרענעצן פֿון אומפּינקטלעכקייט איז $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ דער סאַמע קלענסטער, נאָר באַם אויסרעכענען איז קומט אויס צו האַלטן פֿאַר אַ באַוווּסטן דעם דריטער פֿון דער רעדוצירטער ברוכצאָל, וועלכע גייט נאָך יענער, וואָס מיר האָבן אָנגענומען פֿאַר אַן אומגעפֿערער, וואָס קומט פֿאָר ניט שטענדיק. דאָס אויסרעכענען דעם גרענעץ $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ קאָן אויסגעפֿילט ווערן בלויז דעמלט, ווען עס איז באַוווּסט דער דריטער פֿון דער פֿריִערדיקער רעדוצירטער ברוכצאָל. אויב אָבער עס איז באַוווּסט איין רעדוצירטע ברוכצאָל, $\frac{P_n}{Q_n}$, איז מעגלעך בלויז אָנצו־ווייזן דעם גרענעץ פֿון דער אומפּינקטלעכקייט $\frac{1}{Q_n^2}$.

צום ביישפּיל, אויב מיר ווייסן, אַז אַ וועלכע עס איז רעדוצירטע ברוכצאָל פֿון דער געגעבענער געשטאַפּלטער איז $\frac{45}{17}$, קאָן מען זאָגן, אַז $\frac{45}{17}$ איז פּינקטלעך ביז $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$. אויב מיר ווייסן, כּוצדעם, אַז דער ווייזער פֿון דער פֿאָריקער רעדוציר־טער ברוכצאָל איז, צום ביישפּיל, 8, קאָן מען זאָגן, אַז $\frac{45}{17}$ איז פּינקטלעך ביז

$$\frac{1}{17(17+8)}=\frac{1}{425}.$$

ענדלעך, ווען מיר ווייסן, אַז דער ווייזער פֿון דער ווייטערדיקער רעדוצירטער ברוכ־צאָל איז, צום ביישפּיל, 37, קאָנען מיר גאַראַנטירן, אַז $\frac{45}{17}$ אונטערשיידט זיך פֿון דעם פּינקטלעכן באַטרעף פֿון דער געשטאַפּלטער ברוכצאָל אָפּ ווייניקער, איידער אָפּ

$$\frac{1}{17\cdot 37}=\frac{1}{629}.$$

174. טעאָרעמע 3. א רעדוצירטע ברוכצאָל איז נעענטער צום פּינקטלעכן באטרעף פון דער געשטאפּלטער ברוכצאָל, איידער א וועלכע עס איז אנדער ברוכ־צאָל מיט א קלענערן דיַיטער.

באוויַיז. לאָמיר אָננעמען, אז עס איז פאראן א ברוכצאָל $\frac{a}{b}$, וועלכע אונטער־שיידט זיך ווייניקער פונעם פּינקטלעכן באטרעף פון דער געשטאפּלטער ברוכצאָל A, איידער די רעדוצירטע ברוכצאָל $\frac{P_n}{Q_n}$, און לאָמיר זאָגן, אז $b < Q_n$. וועלן מיר דערוויַיזן, אז אזא האנאָכע איז ניט מעגלעך. אזוי ווי $\frac{P_n}{Q_n}$ איז נעענטער צו A, איידער $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, און $\frac{a}{b}$ איז נעענטער צו A, איידער $\frac{P_n}{Q_n}$, איז $\frac{a}{b}$ אוודאי נעענ־טער צו A, איידער $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; אזוי ווי A געפינט זיך, כוצדעם, צווישן $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ און $\frac{P_n}{Q_n}$, איז די אבסאָלוטע גרייס פון דער דיפערענץ $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ גרעסער, איידער די אבסאָלוטע גרייס פון דער דיפערענץ $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; הייסט דאָס, ווען מיר לייגן אכט בלויז אף די אבסאָלוטע גרייסן, קאָנען מיר שריַיבן:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{aQ_{n-1} - bP_{n-1}}{bQ_{n-1}};$$

$$Q_n Q_{n-1} > bQ_{n-1}.$$

קייפלענדיק גלידערוויַיז די דאָזיקע אומגליַיכקייַטן (נעמענדיק בלויז די אב־סאָליוטע גרייסן), באקומען מיר:

$$1 > aQ_{n-1} - bP_{n-1}.$$

אזוי ווי aQ_{n-1} און bP_{n-1} זיַינען גאנצע צאָלן, איז די דאָזיקע אומגליַיכקייַט מעגלעך בלויז באם באדינג:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 0; \quad \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

אָבער די דאָזיקע גליַיכקייַט איז אומעגלעך, וויַיל, לויט ווי מיר האָבן אָנגענומען, קומט צו $\frac{a}{b}$ נעענטער צו A, איידער $\frac{P_n}{Q_n}$, בייס $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, לויט ווי עס איז דערוויזן געוואָרן, אונטערשיידט זיך מער פון A, איידער $\frac{P_n}{Q_n}$. די אומעגלעכקייַט פון דער גליַיכקייַט באוויַיזט די אומעגלעכקייַט פון דער געמאכטער האשאָרע.

פון דער דערוויזענער טעאָרעמע איז געדרונגען, אז די רעדוצירטע ברוכצאָלן שטעלן מיט זיך פאָר די איינפאכסטע פאָרם פון דערנעענטערונג צום פּינקטלעכן באטרעף פון דער געשטאפּלטער ברוכצאָל.

175. דערנעענטערונג פון א געגעבענער אריפמעטישער ברוכצאָל.

ווען דער ציילער און דער נויַיזער פון א געגעבענער אומפארקירצבארער אריפמע־

טישער ברוכצאָל זײַנען אויסגעדריקט אינ גרויסע צאָלנ, איז אָפטמאָל פאראנ א נייטיקײַט אויסצודריקנ די דאָזיקע ברוכצאָל אינ אנ איינפאכערער, כאָטש אומגעפערער, פאָרמ. צו דעמ צוועק איז גענוג צו פארוואנדלענ די געגעבענע ברוכצאָל אינ א געשטאפלטער אונ געפינענ די אָדער יענע רעדוצירטע ברוכצאָל, לויט דעמ געווּנטשענעמ גראד פונ דער דערנעענטערונג.

ב ײַ ש פּ י ל.

ווּיסנדיק, אז די צאָל π, וועלכע שטעלט פאָר די פארהעלטעניש פונ א קרײַזליניע צו איר דיִאמעטער, געפינט זיכ צווישנ די צוויי ברוכצאָלנ 3,141592653 אונ 3,141592654, געפינט די איינפאכסטע דערנעענטערונגענ פונ π.

פארוואנדלענדיק בײדע ברוכצאָלנ אינ געשטאפלטע אונ נעמענדיק בלויז געמײנזאמע ניט קײנ פולע טײלוועררטנ, געפינענ מיר:

$$\pi = (3,7,15,1 \ldots)$$

די רעדוצירטע ברוכצאָלנ וועלנ זײַנ:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

די דערנעענטערונג $\frac{22}{7}$ איז געפונענ געוואָרנ דורכ א ר כ י מ ע ד נ; זי איז ריכטיק ביז

$$\frac{1}{7.106} = \frac{1}{742};$$

הײסט דאָס, אז ביז $\frac{1}{100}$ איז זי אוואדע ריכטיק. די צאָל $\frac{355}{113}$ איז אָנגעוויזנ געוואָרנ דורכ א ד ר י ַ א נ מ ע צ י; נעמענדיק די דאָזיקע צאָל אָנשטאָט π, גרײַזנ מיר אפּ ווײניקער, אײדער אפּ

$$\frac{1}{133.33102} = \frac{1}{3740526};$$

ד. ה. יעדנפאלס אפּ ווײניקער פונ אײנ מיליאָנטל.

די דערנעענטערונגענ פונ ארכימעד אונ מעצי, זײַענדיק פונ גראָדער אָרדענונג, זײַנענ גרעסערע פונ π.

176. דאָס ארויסציִענ דעמ קוואדראט-וואָרצל. לאָמיר זאָגנ, אז עס פאָדערט זיכ צו געפינענ $\sqrt{41}$ מיט דער הילפ פונ געשטאפלטע ברוכצאָלנ. באהאנדלענ מיר דאָס אזוי: די גרעסטע גאנצע צאָל, וואָס געפינט זיכ אינ $\sqrt{41}$, איז 6; דעריבער קאָנענ מיר אָנעמענ, אז

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x},$$

פונוואנען:

$$\frac{1}{x}=\sqrt{41}-6;\ x=\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}. \qquad (1)$$

אזויווי $\sqrt{41}+6$ איז גלײַך צו 12 מיט א ברוכצאָל, איז 2 די גרעסטע צאָל, וואָס איז פאראַן אין $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$, דעריבער קאָנען מיר אָנעמען, אז

$$x=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y},$$

פונוואנען:

$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2+\frac{\sqrt{41}-4}{5}; \qquad (2)$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

אזויווי $\sqrt{41}+4$ איז גלײַך צו 10 מיט א ברוכצאָל, איז 2 די גרעסטע גאנצע צאָל, וואָס איז פאראַן אין $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$; דעריבער קאָנען מיר אָנעמען, אז:

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z} \qquad (3)$$

פונוואנען:

$$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5};\quad z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6.$$

די גרעסטע גאנצע צאָל, וואָס איז פאראַן אין $\sqrt{41}+6$, איז 12, דעריבער קאָנען מיר אָנעמען:

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}, \qquad (4)$$

פונוואנען:

$$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6;\quad v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

פארגלײַכנדיק די פאָרמולע פאר v מיט דער פאָרמולע פאר x, געפינען מיר, אז $x=v$. באנוצנדיק זיך מיט די גלײַכקײַטן (1), (2), (3) און (4), באקומען מיר:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\dots}}}}}}$$

אזוי ארום האָט זיך $\sqrt{41}$ אויסגעדריקט אין א פּעריִאָדישער געשטאפּלטער ברוכצאָל. געפינענדיק די רעדוצירטע ברוכצאָלן, באקומען מיר פאָלגנדיקע אומגע־פערע באטרעפן פון $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

אף אן ענלעכן אופן געפינען מיר:

$$\sqrt{12}=(3;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ ;6\ 1;\ 1\ ...);$$

$$\sqrt{29}=(5;\ 2;\ 1;\ 1;\ 2;\ 10).$$

177. געפינען די פּאָר לייזונגען פון אן אומבאשטימטער גלײַכונג.

די געשטאפּלטע ברוכצאָלן גיבן א מיטל צו געפינען איין פּאָר לייזונגען פון דער אומבאשטימטער גלײַכונג

$$ax+by=c.$$

מירן דאָס ווײַזן אף בײַשפּילן. לאָמיר זאָגן, אז מירן האָבן א גלײַכונג:

$$43x+15y=8.$$

נעמען מיר די ברוכצאָל $\frac{43}{15}$ און פארוואנדלען זי אין א געשטאפּלטער:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}},$$

איצט לאָמיר געפינען די פאָרלעצטע רעדוצירטע ברוכצאָל; דאָס וועט זײַן $\frac{20}{7}$. אזיווי די לעצטע רעדוצירטע ברוכצאָל איז דער פּינקטלעכער באטרעף פון דער געשטאפּלטער ברוכצאָל, ד. ה. פון $\frac{43}{15}$, און $\frac{20}{7}$ איז א רעדוצירטע ברוכצאָל פון אומגראָדער אָרדענונג, קאָנען מיר אפן גרונט פון דער טעאָרעמע פון § 172 (די באמערקונג) שרײַבן:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15.7},$$

פונדאנען:

$$43.7-15.20=1.$$

קעדיי צוצופּאסן די לעצטע אידענטישקײַט צו דער געגעבענער גלײַכונג, קייפ־לען מיר אלע גלידער אירע אף 8 און שטעלן זי פאָר אזוי:

$$43.56+15\ (-160)=8.$$

פאַרגלײַכנדיק איצטער די דאָזיקע אידענטישקײַט מיט אונדזער גלײַכונג, געפֿי־נען מיר, אַז אין דער לעצטער קאָן מען אָננעמען פֿאַר x די צאָל 56, און פֿאַר y די צאָל 160.

דעמלט וועלן זיך אַלע מעגלעכע לייזונגען אויסדריקן דורך די פֿאָרמולעס (§ 149):

$$x = 56 - 15t;\ y = -160 + 43t.$$

די דאָזיקע פֿאָרמולעס קאָן מען פֿאַרייִנפֿאַכן, פֿאַרבײַטנדיק t אויף $t+3$ (דאָס קאָן מען מאַכן צוליב דער באַליביקייט פֿון דער צאָל t):

$$x = 56 - 15(t+3) = 11 - 15t;$$
$$y = -160 + 43(t+3) = -31 + 43t.$$

לאָמיר נעמען נאָך אַ בײַשפּיל:

$$7x - 19y = 5.$$

פֿאַרוואַנדלענדיק די ברוכצאָל $\frac{7}{19}$ אין אַ געשטאַפּלטער, געפֿינען מיר:

$$\frac{7}{19} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

די פֿאָרלעצטע רעדוצירטע ברוכצאָל וועט זײַן $\frac{3}{8}$. אַזוי ווי זי איז אַ גראָדע, איז

$$\frac{7}{19} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19.8},$$

פֿונוואַנען:

$$7.8 - 19.3 = -1.$$

קייפֿלענדיק אַלע גלידער פֿון דער דאָזיקער גלײַכקייט אויף 5, באַקומען מיר:

$$7.40 - 19.15 = -5,$$

אָדער:

$$7.(-40) - 19.(-15) = 5.$$

פֿאַרגלײַכנדיק די לעצטע אידענטישקײַט מיט דער געגעבענער גלײַכונג, געפֿינען מיר, אַז אין דער לעצטער קאָן מען פֿאַר x אָננעמען די צאָל -40, און פֿאַר y די צאָל -15. דעמלט איז:

$$x = -40 + 19t;\quad y = -15 + 7t.$$

די דאָזיקע פֿאָרמולעס קאָן מען פֿאַרייִנפֿאַכן, פֿאַרבײַטנדיק t אויף $t+2$.

$$x = -40 + 19(t+2) = -2 + 19t;$$
$$y = -15 + 7(t+2) = -1 + 7t.$$

178. די אויסרעכענונג פון לאָגאַריפמ. לאָמיר זאָגן, אז עס פאָדערט זיך אויסצורעכענען $\lg 2$ לויטן באזיס 10; מיט אנדערע ווערטער, עס פאָדערט זיך צו לייזן די גלײַכונג $2=10^x$. געפינען מיר צוערשט פאר x די נאָענטסטע גאנצע צאָל. אזוי ווי $1=10^0$ און $10=10^1$, געפינט זיך x צווישן 0 און 1; פאָלגלעך, קאָן מען אָננעמען, אז $x=\frac{1}{z}$; דעמלט איז $2=10^{\frac{1}{z}}$, אָדער $2^z=10$. עס איז ניט שווער איַינצוזען, אז z געפינט זיך צווישן 3 און 4; פאָלגלעך, קאָן מען אָננעמען, אז

$$z=3+\frac{1}{z_1}.$$

דעמלט איז

$$10=2^{3+\frac{1}{z_1}}=2^3\cdot 2^{\frac{1}{z_1}}=8\cdot 2^{\frac{1}{z_1}},$$

פונוואנען:

$$2^{\frac{1}{z_1}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

ד. ה.

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

דורך אויספרווון געפינען מיר, אז z_1 געפינט זיך צווישן 3 און 4, דעריבער קאָן מען אָננעמען, אז,

$$z_1=3+\frac{1}{z_2},$$

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}}=\left(\frac{5}{4}\right)^3\ \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}},$$

פונוואנען:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{128}{125};$$

אָדער

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{z_2}=\frac{5}{4}.$$

ווידער געפינען מיר דורך אויספרווון, אז z_2 געפינט זיך צווישן 9 און 10. דעם דאָזיקן גאנג קאָן מען פאָרזעצן וויַיטער. באַנוגענענדיק זיך מיט דער אומגעפערער גרייס פון z_2 קאָנען מיר אָננעמען

$$z_2=9,$$

פאָלגלעך איז:

$$z_1=3+9\frac{1}{9};\quad z=3+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}\quad \text{און}\quad x=\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}}.$$

פאַרוואַנדלענדיק די דאָזיקע געשטאַפּלטע ברוכצאָל אין אַ געוויינלעכער, באַקומען מיר

$$x = \frac{28}{93} = 0{,}30107;$$

דער דאָזיקער רעזולטאַט איז ריכטיק ביז פערטן געצענטלטן צייכן. גענויערע אויסרעכענונגען גיבן:

$$x = 0{,}3010300.$$

IV. וועגן לימיטן.

179. דעפיניציעס. לאָמיר נעמען די סומע פון די גלידער פון אַזאַ אומענדלעך־פאַלנדיקער געאָמעטרישער פּראָגרעסיע:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \quad \left(\text{דער דינער } \frac{1}{2}\right).$$

די דאָזיקע סומע פאַרגרעסערט זיך בײַ דער אומבאַגרענעצטער פאַרגרעסערונג פון דער צאָל גלידער, דערנענטערנדיק זיך (§ 87) צו דער שטענדיקער צאָל 2 אַזוי, אַז די דיפערענץ

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

ווערט בײַ אַ גענוגנדיקער פאַרגרעסערונג פון דער צאָל כיבערצאָלן קלענער פון אַ באַליביקער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל (צום בײַשפּיל, קלענער פון 0,000001) און בלײַבט בײַ דער ווײַטערדיקער פאַרגרעסערונג פון דער צאָל כיבערצאָלן שטענדיק קלענער פון דער דאָזיקער צאָל.

בײַ די דאָזיקע באַדינגונגען זאָגן מיר, אַז די סומע

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

האָט דעם לימיט 2, אויב די צאָל כיבערצאָלן אין איר פאַרגרעסערט זיך אומבאַגרענעצט.

אין דעם דאָזיקן בײַשפּיל בלײַבט די פאַרענדערלעכע גרייס (די סומע פון די גלידער פון דער פּראָגרעסיע), דערנענטערנדיק זיך צו איר לימיט, קלענער פון אים. עס קאָנען אָבער זײַן פאַלן, ווען די פאַרענדערלעכע גרייס, דערנענטערנדיק זיך צו איר לימיט, בלײַבט גרעסער פון אים. צום בײַשפּיל, אויב מיר זאָלן אָננעמען, אַז אין דער סומע

$$1 + \frac{1}{x}$$

באַצייכנט דער בוכשטאַב x אַ פאַרענדערלעכע פּאָזיטיווע גרייס, וועלכע פאַרגרעסערט זיך אומבאַגרענעצט, וועט די דאָזיקע סומע זיך דערנענטערן צום לימיט 1, בלײַבנדיק שטענדיק גרעסער פון 1.

עס קאָן אפילו טרעפן, אַז די פאַרענדערלעכע גרייס ענדערט זיך אַזוי, אַז זי ווערט אַמאָל גרעסער, אַמאָל קלענער פון איר לימיט. אַזאַ פאַל האָבן מיר שוין

געזענ, ווענ מיר האָבנ גערעדט וועגנ דער סומע פונ די גלידער פונ אַנ אומענד־לעכ־פאָלגנדיקער געאָמעטרישער פראָגרעסיע (§ 87):

$$2;\ \ -1;\ \ +\frac{1}{2};\ \ -\frac{1}{4};\ \ +\frac{1}{8}\cdots$$ (דער דײַטער $\frac{1}{2}$)

דער דאָזיקער לימיט איז גלײַכ צו $1\frac{1}{3}$, אונ די סומעס פונ צוויי, דרײַ, פיר א. א. וו. גלידער פונ דער פראָגרעסיע זײַנענ בײַטנדיק זיכ אַמאָל גרעסער, אַמאָל קלענער פונ זײַער לימיט:

$$2-1=1<1\frac{1}{3};\ \ 2-1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}>1\frac{1}{3};$$

$$2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}<1\frac{1}{3}\cdots$$

נאָכ די דאָזיקע בײַשפּילנ וועט זײַנ פאַרשטענדלעכ די פאָלגנדיקע דעפיניציע פונ אַ לימיט:

אויב די פאַרענדערלעכע גרייס x דערנעענטערט זיכ צו דער שטענדיקער גרייס a אַפ אַזאַ אופנ, אַז די אַבסאָלוטע גרייס פונ דער דיפערענצ $a-x$ (אָדער $x-a$) וועט זײַנ אונ (בײַ ווײַטערדיקער ענדערונג) וועט בלײַבנ קלענער פונ אַ באַליביקער געגעבע־נער פאָזיטיווער גרייס (ווי קליינ זי זאָל ניט זײַנ), רופט זיכ אָנ די דאָזיקע שטענדיקע גרייס a דער לימיט פונ דער פאַרענדערלעכער גרייס x.

אָנשטאָט צו זאָגנ: „די צאָל x האָט דעם לימיט „a“, זאָגט מענ עס אָפטמאָל קירצער: „x שטרעבט צו a“ אונ שריפטלעכ דריקט מענ דאָס אויס אַזוי: $x\to a$ (אָדער דער לימיט פונ x איז גלײַכ צו a).

אויב אַ פאַרענדערלעכע גרייס פאַרגרעסערט זיכ אומבאַגרענעצט (אָנ אַ לימיט), דעמלט זאָגט מענ באַדינגט, אַז זי שטרעבט צו $+\infty$; אויב ווידער די פאַרענדערלעכע צאָל בלײַבט אַ נעגאַטיווע, נאָר איר אַבסאָלוטע גרייס פאַרגרעסערט זיכ אומבאַ־גרענעצט, זאָגט מענ, אַז זי שטרעבט צו $-\infty$.

אַ פאַרענדערלעכע גרייס, וואָס שטרעבט צו ∞, ווערט אָפטמאָל אָנגערופנ אַנ אומ־ענדלעכ גרויסע, אונ אַ פאַרענדערלעכע גרייס, וואָס שטרעבט צו נול, ווערט אָנגערופנ אַנ אומענדלעכ קליינע. מע דאַרפ אָבער געדענקענ, אַז די דאָזיקע נעמענ באַטײַטנ ניט „זייער אַ גרויסע צאָל“ אָדער „זייער אַ קליינע צאָל“, כאַראַקטעריזירנ ניט די עצעם גרײַס, נאָר דעם פראָצעס פונ איר ענדערונג: אַ צאָל, וואָס ווערט אָנגערופנ „אומ־ענדלעכ גרויסע“, ענדערט זיכ אַזוי, אַז זי ווערט אונ בלײַבט (לויט דער אַבסאָלו־טער גרייס) גרעסער פונ אַ באַליביקער געגעבענער צאָל, אונ אַ צאָל, וואָס ווערט אָנגערופנ „אומענדלעכ קליינע“, ענדערט זיכ אַזוי, אַז זי ווערט אונ בלײַבט (לויט דער אַבסאָלוטער גרייס) קלענער פונ אַ באַליביקער געגעבענער פאָזיטיווער צאָל.

אויב מע זאָל זיכ באַנוצנ אינ דעם זינ מיטנ נאָמענ „אומענדלעכ קליינע צאָל“, קאָנ מענ די דעפיניציע פונ לימיט אַרויסזאָגנ קירצער אָט אַזוי:

די שטענדיקע צאָל a רופט זיכ אָנ דער לימיט פונ דער פאַרענדערלעכער צאָל x, אויב די דיפערענצ $x-a$ איז אַנ אומענדלעכ קליינע צאָל.

180. אייניקע אייגנשאַפטן פון אומענדלעך קליינע צאָלן. 1) די אלגעבראַ׳ישע סומע פון אומענדלעך קליינע צאָלן איז אומענדלעך קליין (אויב די צאָל כיבערצאָלן פאַרגרעסערט זיך ניט אומענדלעך).

לאָמיר נעמען, צום ביישפּיל, דריי אומענדלעך קליינע צאָלן α, β און γ (זיי קאָנען זיין פּאָזיטיווע און נעגאַטיווע). קעדיי צו וויזן, אז די סומע זייערע $\alpha+\beta+\gamma$ איז אומענדלעך קליין, מוז מען זיך איבערצייגן, אז די אבסאָליוטע גרייס פון דער דאָזיקער סומע ווערט און בלייבט קלענער פון יעטווידער געגעבע־נער פּאָזיטיווער צאָל, צום ביישפּיל, קלענער פון איין מיליאָנטל. און טאַקע, אזוי־ווי די צאָלן α, β און γ זיינען אומענדלעך קליינע, ווערט און בלייבט בא זייער ענדע־רונג די אבסאָליוטע גרייס פון יעדערער פון זיי קלענער פון א באַליביקער געגע־בענער צאָל, אויך קלענער פון $\frac{1}{3}$ מיליאָנטל; הייסט דאָס, דעמלט ווערט און בלייבט די אבסאָליוטע גרייס פון דער סומע $\alpha+\beta+\gamma$ קלענער פון $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ מיליאָנטל, ד. ה. קלענער פון איין מיליאָנטל.

מירן דאָ באמערקן, אז אויב צוגלייך מיט דער פאַרקלענערונג פון די כיבער־צאָלן וועט זייער צאָל אומופּהערלעך וואקסן, קאָן זיך זייער סומע ארויסווייזן ניט קיין אומענדלעך קליינע. לאָמיר נעמען, צום ביישפּיל, אזא סומע:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} \quad (n \text{ כיבערצאָלן})$$

און לאָמיר אָננעמען, אז די צאָל n וואקסט אומבאגרענעצט; איז דעמלט, ניט געקוקט אף דעם, וואָס מיט דער פאַרגרעסערונג פונעם ווייזער n פאַרקלענערן זיך די כיבערצאָלן אומבאגרענעצט, בלייבט זייער סומע אומפאַרענדערט (זי איז גלייך צו 1).

2) דער פּראָדוקט פון אן אומענדלעך קליינער צאָל אף א שטענדיקער צאָל איז אומענדלעך קליין.

צום ביישפּיל, דער פּראָדוקט $100\,\alpha$, אין וועלכן α איז אן אומענדלעך קליינע צאָל, ווערט און בלייבט (לויט דער אבסאָליוטער גרייס) קלענער פון א באַליביקער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל, צום ביישפּיל קלענער פון איין מיליאָנטל, ווייל α ווערט און בלייבט א קלענערע פון יעטווידער געגעבענער פּאָזיטיווער צאָל, דערינ אויך קלענער פון איין הונדערטמיליאָנטל.

3) דער פּראָדוקט פון אן אומענדלעך קליינער צאָל אף א צווייטער אומענדלעך קליינער צאָל איז אומענדלעך קליין.

אויב דער פּראָדוקט פון אן אומענדלעך קליינער צאָל אף א שטענדיקער צאָל ווערט און בלייבט אומענדלעך קליין, האָט דער פּראָדוקט פון איין אומענדלעך קליינער צאָל אף דער אנדערער געוויס די דאָזיקע אייגנשאַפט (מיט דער פאַרקלענערונג פונעם קייפלער פאַרקלענערט זיך דער פּראָדוקט).

4) דער טיילוועוטס פון אן אומענדלעך קליינער צאָל אף א שטענדיקער צאָל איז אומענדלעך קליין. צום ביישפּיל, דער טיילוועוטס $\alpha : \frac{1}{10}$ איז אומענדלעך קליין,

וויל ער איז גלייכ צומ פראָדוקט $10\cdot\alpha$, ד. ה. צומ פראָדוקט פונ אנ אומענדלעכ־קליינער צאָל אפ א שטענדיקער צאָל.

באמערקונג. דער טיילווערט פונ אנ אומענדלעכ קליינער צאָל אפ א צווייטער אומענדלעכ קליינער צאָל קאָנ אָפטמאָל זיינ גלייכ צו א שטענדיקער צאָל, אמאָל אנ אומענדלעכ קליינער אונ אמאָל אנ אומענדלעכ גרויסער. עס הענגט אלצ אָפ פונ דעמ, לויט וואָסער געזעצ עס פארקלענערט זיכ די טיילצאָל אונ לויט וואָסער געזעצ עס פארקלענערט זיכ דער טיילער. לאָמיר נעמענ, צומ ביישפיל, אזוינע דריי טיילווערטנ:

$$\frac{2\alpha}{\alpha}=2;\quad \frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha;\quad \frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}.$$

לאָמיר אָנעמענ, אז α איז אנ אומענדלעכ קליינע צאָל. דעמלט איז דער ערשטער טיילווערט, וועלכער איז שטענדיק גלייכ צו 2, א שטענדיקע צאָל; דער צווייטער טיילווערט, וואָס איז גלייכ צו α, איז אנ אומענדלעכ קליינע צאָל, אונ דער דריטער טיילווערט, וועלכער איז גלייכ צו דער ברוכצאָל $\frac{1}{\alpha}$, איז אנ אומענדלעכ גרויסע צאָל, וויל א ברוכצאָל, אינ וועלכער דער ציילער איז א שטענדיקע צאָל אונ דער דייטער פארקלענערט זיכ אומבאגרענעצט, פארגרעסערט זיכ אָנ א סאָפ.

181. די אייגנשאפטנ פונ די לימיטנ. 1) <u>א פארענדערלעכע צאָל, וואָס ענדערט זיכ לויט א באשטימטנ געזעצ, קאָנ ניט האָבנ מער פונ איינ לימיט.</u>

לאָמיר אָנעמענ דעמ קעגנטייל, נעמלעכ: אז א פארענדערלעכע צאָל x, ענדערנדיק זיכ לויט א געוויסנ געזעצ, שטרעבט צו צוויי פארשיידענע לימיטנ, צומ ביישפיל צו 5 אונ צו 5,1. לויט דער דעפיניציע פונ א לימיט, דארפנ דעמלט די דיפערענצנ

$$x-5 \text{ אונ } x-5{,}1$$

זיינ אומענדלעכ קליינע צאָלנ (פאָזיטיווע אָדער נעגאטיווע). לאָמיר זאָגנ, אז

$$x-5=\alpha$$

אונ

$$x-5{,}1=\beta;$$

דעמלט איז

$$x=5+\alpha$$

אונ

$$x=5{,}1+\beta.$$

אונ, פאָלגלעכ, איז

$$5+\alpha=5{,}1+\beta,$$

פונוואנענ

$$\alpha-\beta=0{,}1.$$

אָבער די דאָזיקע גלייכקייט איז ניט מעגלעכ, וויל די דיפערענצ $\alpha-\beta$, וועלכע שטעלט פאָר מיט זיכ אנ אלגעבראישע סומע פונ אומענדלעכ קליינע צאָלנ, איז אומענדלעכ קליינ אונ, פאָלגלעכ, קאָנ זי ניט זיינ גלייכ צו א באשטענדיקער צאָל.

הייסט דאָס, אַז עס קאָן ניט דערלאָזן ווערן, אַז די צאָל x זאָל האָבן 2 פאַרשיי־דענע לימיטן.

2) אויב די דיפערענץ פון צוויי פאַרענדערלעכע צאָלן (x און y) איז אומענד־לעך קליין (אָדער גלײַך צו נול), און איינע פון זיי האָט אַ לימיט, האָט דעמלט די צווייטע צאָל אויך דעם זעלביקן לימיט.

לאָמיר אָננעמען, צום בײַשפּיל, אַז די צאָל x האָט אַ לימיט 2. דעמלט קאָן מען אָננעמען, אַז $x=2+\alpha$, ווו α איז אַן אומענדלעך קליינע צאָל. לאָמיר אָננעמען, כּוצדעם, אַז די דיפערענץ $y-x$ איז גלײַך צו דער אומענדלעך קליינער צאָל β (אָדער צו נול).

דעמלט איז:

$$(2+\alpha)-y=\beta,$$

פונוואַנען:

$$2-y=\beta-\alpha.$$

אַזוי־ווי די דיפערענץ $\beta-\alpha$ איז אַן אומענדלעך קליינע צאָל, איז פון דער לעצ־טער גלײַכקייט צו זען, אַז 2 איז דער לימיט פון דער צאָל y.

3) אומגעקערטע טעאָרעמע. אויב צוויי פאַרענדערלעכע צאָלן (x און y) האָבן אַ געמיינזאַמען לימיט, איז זייער דיפערענץ אומענדלעך קליין (אָדער גלײַך צו נול).

לאָמיר אָננעמען, צום בײַשפּיל, אַז די צאָלן x און y האָבן ביידע איין לימיט 10. דעמלט איז

$$x=10+\alpha \quad \text{און} \quad y=10+\beta,$$

ווו α און β זײַנען אומענדלעך קליינע צאָלן. פאָלגלעך:

$$x-y=(10+\alpha)-(10+\beta)=\alpha-\beta.$$

אַזוי־ווי די דיפערענץ $\alpha-\beta$ איז אומענדלעך קליין אָדער גלײַך צו נול, איז אויך דער לינקער טייל פון דער גלײַכקײַט, ד. ה. די דיפערענץ $y-x$, אומענדלעך קליין אָדער גלײַך צו 0.

4) דער לימיט פון אַן אַלגעבראַאישער סומע פון פאַרענדערלעכע צאָלן איז גלײַך צו דער אַלגעבראַאישער סומע פון די לימיטן פון די דאָזיקע צאָלן (אויב די צאָל כּיבערצאָלן איז ניט אומענדלעך גרויס).

לאָמיר אָננעמען, אַז מיר האָבן אַ סומע פון דרײַ פאַרענדערלעכע צאָלן $x+y+z$, און לאָמיר אָננעמען, אַז $x\to3$, $y\to2$ און $z\to-5$. דעמלט קאָן מען אופשרײַבן די גלײַכקײַטן:

$$x=3+\alpha;\quad y=2+\beta;\quad z=-5+\gamma,$$

ווו α, β און γ זײַנען אומענדלעך קליינע צאָלן.

פאָלגלעך, איז

$$x+y+z=(3+\alpha)+(2+\beta)+(-5+\gamma)=(3+2-5)+(\alpha+\beta+\gamma),$$

פונדאַנען:

$$(x+y+z)-(3+2-5)=\alpha+\beta+\gamma.$$

דער רעכטער טייל פונ דער דאָזיקער גלײַכקײַט איז א סומע פונ אנ ענדלעכער צאָל פונ אומענדלעכ קליינע כיבערצאָלנ, אונ דעריבער איז זי אליינ אומענדלעכ קליינ; אונ פונ דעם דארפ מענ שליסנ, אז די פארענדערלעכע סומע $x+y+z$ שטרעבט צו דעם לימיט $5=2+3$, ד. ה. צו דער אלגעבראישער סומע פונ די לימיטנ.

די דאָזיקע באהאנדלונג קאָנ מענ איבערכאזערנ וועגנ פיר, פינפ אונ מער כיבערצאָלנ, אויב נאָר זייער צאָל זאָל ניט אָנוואקסנ אומענדלעכ (אינ קעגנפאל וואָלט די סומע $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ געקאָנט ארויסווײַזנ זיכ פאר גאָרניט קיינ אומענדלעכ קליינע צאָל).

5) דער לימיט פונ א פראָדוקט פונ פארענדערלעכע צאָלנ איז גלײַכ צומ פראָדוקט פונ די לימיטנ פונ די דאָזיקע צאָלנ.

לאָמיר זאָגנ, אז מיר האָבנ א פראָדוקט xy פונ צוויי פארענדערלעכע צאָלנ, פונ וועלכע די ערשטע שטרעבט, לאָמיר זאָגנ, צו דעם לימיט 2, אונ די צווייטע — צו דעם לימיט 3. דעמלט איז:

$$x=2+\alpha \quad \text{אונ} \quad y=3+\beta.$$

פאָלגלעכ איז:

$$xy=(2+\alpha)(3+\beta)=2\cdot3+3\alpha+2\beta+\alpha\beta,$$

פונוואנענ:

$$xy-2\cdot3=3\alpha+2\beta+\alpha\beta.$$

די פראָדוקטנ 3α, 2β אונ $\alpha\beta$ זײַנענ אומענדלעכ קליינע צאָלנ; דעריבער איז אויכ זייער סומע אומענדלעכ קליינ, אונ דאָס באטײַט, אז

$$xy\to2\cdot3$$

ד. ה.

$$\lim\cdot xy=(\lim x)\cdot(\lim y)$$

דעמ דאָזיקנ אויספיר קאָנ מענ פארא לגעמיינערנ אפנ פראָדוקט פונ דרײַ, פיר אונ מער מיטקייפלער. אזוי, צומ בײַשפיל, באטראכטנדיק דעמ פראָדוקט xyz אלס א פראָדוקט בלויז פאר צוויי מיטקייפלער xy אונ z, קאָנענ מיר שרײַבנ:

$$(\lim.\ xyz)=(\lim.\ xy)\cdot(\lim.\ z)=(\lim.\ x)\cdot(\lim.\ y)\cdot(\lim.\ z).$$

6) דער לימיט פונעמ טיילוערט פונ פארענדערלעכע צאָלנ איז גלײַכ צומ טיילוערט פונ לימיט פונ דער כילעקצאָל אפנ לימיט פונעמ טיילער, אויב דער לימיט פונעמ טיילער איז ניט גלײַכ צו נול.

לאָמיר זאָגנ, אז $x\to2$ אונ $y\to3$; דעמלט איז

$$x=2+\alpha \quad \text{אונ} \quad y=3+\beta,$$

וווּ α אונ β זײַנענ אומענדלעכ קליינע צאָלנ. פאָלגלעכ, איז:

$$\frac{x}{y}-\frac{2}{3}=\frac{2+\alpha}{3+\beta}-\frac{2}{3}=\frac{(2+\alpha)\,3-(3+\beta)\,2}{(3+\beta)\cdot2}\,2=\frac{3\alpha-2\beta}{(3+\beta)\cdot3}\cdot$$

אין דער ברוכצאָל, וואָס שטייט אין רעכטן טייל פון דער דאָזיקער גלײַכקײַט, איז דער ציילער אן אומענדלעך קליינע צאָל, ווײַל ער איז די אַלגעבראַישע סומע פון צוויי אומענדלעך־קליינע צאָלן; דער דײַטער ווידער, האָבנדיק פאר א לימיט די צאָל 3^2, וואָס איז ניט גלײַך צו נול, קאָן ניט שטרעבן צו נול. אויב אָבער דער ציילער פון א ברוכצאָל איז אומענדלעך קליין און דער דײַטער איז ניט אומענדלעך קליין, איז אזא ברוכצאָל אומענדלעך קליין.

הייסט דאָס, פון דער פריִער אופגעשריבענער גלײַכקײַט דארפן מיר מאכן דעם אויספיר, אז

$$lim. \frac{x}{y} = \frac{2}{3} = \frac{\text{lim. } x}{\text{lim. } y}.$$

7) דער לימיט פון א מאדרייגע, אין וועלכער דער באזיס איז א פארענדערלעכע צאָל, און דער ווײַזער—א שטענדיקע, איז גלײַך צו דער זעלביקער מאדרייגע פונעם לימיט פון דעם באזיס.

מיר וועלן זיך באגרענעצן מיט א פאל, ווען דער מאדרייגע־ווײַזער איז א גאנצע פאָזיטיווע צאָל. אין דעם פאל שטעלט מיט זיך פאָר די דאָזיקע טעאָרעמע אן איינפאכן אויספיר פון דער טעאָרעמע וועגן לימיט פון א פראָדוקט. אזוי איז

$$lim. (x^3) = lim. (xxx) = (lim. x)(lim. x)(lim. x) = (lim. x)^3.$$

מירן נאָך צוגעבן אָן באווײַזן, אלס האשאָרעס, פאָלגנדיקע צוויי עמעסן וועגן לימיטן:

8) אויב א פארענדערלעכע צאָל וואקסט נאָכאנאנד, בלײַבנדיק אָבער קלענער פון א וועלכער עס איז שטענדיקער צאָל, האָט זי א לימיט.

לאָמיר נעמען, צום בײַשפּיל, די אומגעפערע באטרעפן פון $\sqrt{2}$, גענומען מיט א מאנגל און אויסגערעכנט מיט א פינקטלעכקײַט אפריִער ביז 1, דערנאָך ביז $\frac{1}{10}$, דערנאָך ביז $\frac{1}{100}$ א. א. וו. מיר באקומען דאן אן אומענדלעכע ריי צאָלן:

$$1;\quad 1,4;\quad 1,41;\quad 1,414;\quad 1,4142;\quad 1,41421$$

א. א. וו.

וואָס מער די דאָזיקע צאָלן דערווײַטערן זיך פון אָנהייב ריי, אלץ מער פארגרעסערן זיי זיך; זיי בלײַבן אָבער שטענדיק קלענער פון א געוויסער שטענדיקער צאָל, צום בײַשפּיל, קלענער פון 1,5; בא אזוינע באדינגונגען מוזן מיר דערלאָזן, אז וואָס ווײַטער די ריי, וואָס מיר האָבן גענומען, ווערט פאָרגעזעצט, אלץ מער שטרעבט זי צו א באשטימטן לימיט (דער דאָזיקער לימיט איז אָט די איראציאָנעלע צאָל $\sqrt{2}$).

9) אויב א פארענדערלעכע צאָל ווערט אלץ קלענער, בלײַבנדיק פונדעסטוועגן גרעסער פון א וועלכער עס איז שטענדיקער צאָל, האָט זי א לימיט.

לאָמיר נעמענ אלס א בײַשפּיל א רײ אומגעפּערע באַטרעפנ פונ $\sqrt{2}$, גענענ־מענ מיט אנ איבערפלוס, מיט א פּינקטלעכקײַט ביז 1, ביז $\frac{1}{10}$ ביז $\frac{1}{100}$ א.א.וו.

$$2;\quad 1,5;\quad 1,42;\quad 1,415;\quad 1,4143;\quad 1,41422$$

א. א. וו.

וואָס ווײַטער פונ אָנהייב רײ, ווערנ די דאָזיקע צאָלנ קלענער, אָבער זיי בלײַבנ שטענדיק גרעסער פונ 1,4; בא די דאָזיקע באַדינגונגענ מוזנ מיר אָנעמענ, אז די דאָזיקע רײ שטרעבט צו א לימיט (ער איז גלײַכ צו דער איראַציאָנעלער צאָל $\sqrt{2}$).

געניטונגענ.

279. געפינט דעם לימיט, צו וועלכנ עס שטרעבט די ברוכצאָל

$$\frac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2},$$

אויב

$$x\to 1.$$

לייזונג. אויב $x\to 1$, שטרעבט דער ציילער אונ דײַטער פונ דער געגעבענער ברוכצאָל צו 0. אָבער אזויווי $\frac{0}{0}$ איז אנ אומבאשטימטער אויסדרוק, בלײַבנ מיר אינ אומקלאָרקײַט, צו וועלכנ לימיט עס שטרעבט די געגעבענע ברוכצאָל (אונ אפילע צי שטרעבט זי. נאָר צו א וועלכנ עס איז לימיט), אויב $x\to 1$.

טוענ מיר אזוי: מיר נעמענ אָנ, אז x איז גלײַכ ניט צו 1, נאָר צו א וועלכער עס איז פאַרענ־דערלעכער צאָל, וואָס דערנעענטערט זיכ צו 1. צום בײַשפּיל, לאָמיר זאָגנ, אז $x=1+h$, ווו h איז א וועלכע עס איז פּאָזיטיווע צאָל, וואָס שטרעבט צו נול. דעמלט וועט די גרייס פונ דער געגעבענער ברוכצאָל זײַנ:

$$\frac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{3(1+h)^2-5(1+h)+2}=\frac{2+4h+2h^2-1-h-1}{3+6h+3h^2-5-5h+2}=$$
$$=\frac{2h^2+3h}{3h^2+h}=\frac{2h+3}{3h+1}$$

(פאַרקירצנ די ברוכצאָל אפּ h האָבנ מיר רעכט, ווײַל $h\neq 0$).

לאָמיר איצט אָנעמענ, אז $h\to 0$ אונ, פאָלגלעכ, $x\to 1$:

$$lim\cdot\left(\frac{2h+3}{3h+1}\right)_{h\to 0}=\frac{lim\cdot(2h+3)_{h\to 0}}{lim\cdot(3h+1)_{h\to 0}}=\frac{3}{1}=3.$$

דעם זעלביקנ לימיט געפינענ מיר, אויב מיר נעמענ אָנ, אז $x=1-h$, ווו h איז א וועלכע עס איז פּאָזיטיווע צאָל, וועלכע שטרעבט צו נול. אפּ אזא אויפנ, צי וועט x זיכ דערנעענטערנ צו 1, בלײַבנדיק גרעסער פונ 1 אָדער בלײַבנדיק קלענער פונ 1, וועט פאָרט דער לימיט פונ דער געגעבענער ברוכצאָל זײַנ דער זעלביקער, נעמלעכ 3.

280. געפינט דעם לימיט, צו וועלכנ עס שטרעבט די ברוכצאָל

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8},$$

אויב $x\to 1$.

281. דאָס זעלביקע, אויב $x\to 0$.

282. געפינט דעם לימיט פונ

$$\left(\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}\right)_{x\to 2}.$$

283. געפינט

$$lim.\left(\frac{(x^3-8)}{(2x^2-3x-2)}\right)_{x\to 2}.$$

284. געפינט

$$lim.\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\to\infty},$$

לייזונג. אזוווי

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

איז

$$lim.\frac{n}{n+1}=lim.\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{lim.\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

285. געפינט

$$lim.\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]_{n\to\infty}.$$

286. געפינט

$$lim.\left(\frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}\right)_{x\to\infty}.$$

287. געפינט דעם לימיט, צו וועלכנ עס וועט שטרעבנ א ברוכצאָל, אויב מיר זאָלנ צומ ציילער אונ וויַיזער פונ דער דאָזיקער ברוכצאָל צולייגנ די זעלביקע צאָל, וועלכע וואַקסט אומענדלעכ; מיט אנדערע ווערטער, געפינט

$$lim.\left(\frac{a+m}{b+m}\right)_{m\to\infty}.$$

לייזונג.

$$lim.\frac{a+m}{b+m}=lim.\frac{\frac{a}{m}+1}{\frac{b}{m}+1}=\frac{lim.\left(\frac{a}{m}+1\right)}{lim\left(\frac{b}{m}+1\right)}=\frac{lim.\frac{a}{m}+1}{lim.\frac{b}{m}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

אפ אזא אויפנ, צי וועט די ברוכצאָל $\frac{a}{b}$ זיַינ אנ עכטע $(a<b)$ אָדער אנ אומעכטע $(a>b)$, וועט דער לימיט פונ דער ברוכצאָל בא $m\to\infty$, זיַינ דער זעלביקער. פונ דעמ איז געדרונגענ, אז אנ עכטע ברוכצאָל פארגרעסערט זיכ, דערנעענטערנדיק זיכ צו 1, אונ אנ אומעכטע פארקלענערט זיכ.

ענטפערס צו די געניטונגען.

1. -243; -343; 256; $1\,000\,000$; $-0{,}00001$.

2. $27a^6b^3$; $-8a^9b^6$; $625a^{16}b^8c^4$.

3. $\frac{x^8y^4}{z^{12}}$; $-\frac{27a^3b^9}{8c^6}$; $\frac{0{,}000064a^{18}b^6c^6}{d^{12}}$.

11. $2a\sqrt{a}$; $2a^3b^3\sqrt{2b}$; $5a^2bx\sqrt{2abx}$; $2a\sqrt{2a}$.

12. $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{15}$; $5\sqrt{5}$; $24\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{8}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{a^3}$.

15. $\sqrt{2a^3b^2}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{2a}$.

17. $\frac{1}{60}\sqrt{6}$; $\frac{1}{90}\sqrt{165}$.

18. $\frac{1}{7ay}\sqrt{3ax}$; $\frac{1}{6ax}\sqrt{(6ax^2-9a+10)\,6ax}$.

19. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{x^3}$; $\sqrt[6]{x^4}$; $\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[12]{27}$; $\sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt[12]{y^{10}}$.

20. $\sqrt[12]{x^4y^8}$, $\sqrt[12]{y^6z^6}$; $\sqrt[12]{x^3z^9}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^3}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^2}$.

21. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{3a^2b^4}$; $\sqrt{2a^2b^3}$.

23. $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

24. $a\sqrt{ax}$, $x\sqrt{ax}$, $\sqrt{ax}$.

26. $8\sqrt{2}$;

26. $29\sqrt{3}$.

27. $(2a^2b+ab-1)\sqrt{2ab}$.

28. $12\sqrt{6}$; 120.

32. 15; $6a^3$.

33. $\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt[4]{60}$; $2\sqrt[3]{3}$.

34. $\frac{16x}{a}$.

35. $2a\sqrt{10}$; $1{,}8a\sqrt{10}$.

36. $\sqrt[6]{x}$; $\sqrt[6]{128}$; $\sqrt[12]{a^5}$.

39. $\sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[12]{a^7}$.

47. $-1-\sqrt{2}$; $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$; $\frac{91+13\sqrt{6}}{43}$.

48. $\sqrt{6}-2$; $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})x}{2}$.

51. $\frac{\sqrt[3]{4}-5\sqrt[3]{2}+25}{127}$; $\frac{45+7\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{34}$; $\frac{x+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}}{x+5}$.

52. $x=9$; $x=1$; $x=28\frac{2}{3}$.

53. $x=9$; $x=3$.

54. $x=5$.

78. $(x+7)(x-10)$; $(x+11)(x-8)$.

78. $(x-4)(3x-2)$; $(2x+1)(3x-1)$.

79. $(5x+8)(4x-3)$; $(x+10)(x-2)$.

80. $\frac{x+13}{x+15}$; $\frac{2(x+9)}{3(x-7)}$.

81. $\frac{x+2a-b}{x+a-b}$.

92. ± 1; ± 2; ± 1; ± 3.

93. $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{-1}$; ± 2; $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

94. ± 4; ± 3; ± 3; $\pm\sqrt{-7}$.

97. 1) 3; 8; 2) $x=-5$; $y=-8$ אָדער $x=8$; $y=5$; 3) $x=\pm\sqrt{ab}$; $y=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

98. 1) $x=\pm 3$; $y=\pm 4$; 2) $x=4\pm 4\sqrt{2}$; $y=-4\pm 4\sqrt{2}$; 3) $x=16$; $y=10$

99. $x=\frac{24}{13}$; $y=\frac{24}{5}$.

102. 9; 7,5.

103. $137\cdot 113=15481 m^2$.

104. 12; 4.

109. $x>1$, אויב $\frac{a+b}{ab}>0$ אונ $x<1$, אויב $\frac{a+b}{ab}<0$; $x<4$

113. $a<b$

114. 119.

116. $n=7$.

121. $n=8$.

124. די זײַטנ פונ א דרײַעק: $3a$, $4a$, $5a$, ווּ a איז א באליביקע צאָל.

131. 9; 27; 81; 243; אָדער -18; 54; -162; 486.

136. 183.

140. $4\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{3}$.

143. $\frac{1}{1-x}$.

145. $a_6=\frac{5}{243}$ אָדער $a_6=-\frac{10}{243}$.

147. $2a^2$; $4a(2+\sqrt{2})$.

150. $a(a+x)^{-1}$; $2(a-x)^{-1}$; $3ab(1+x)^{-2}(1-x)^{-1}$.

153. $2a^2b^3$; $5ab^{-4}x^{-1}$.

155. $4a^4b^{-6}$; $4x^6y^4$.

158. $10a^{\frac{5}{6}}x$.

159. $5ac^{-\frac{1}{12}}$; $a^{\frac{1}{2}}$

163. $3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}$.

164. $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{2}{9}}$; $(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

178. 2; n; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

179. 8; 25; $\frac{1}{1024}$; 2; $\frac{1}{4}$.

183. $\frac{1}{3}\lg 7+\lg a+\frac{1}{3}\lg b$; $\lg 4+\frac{1}{5}\lg 2+\frac{1}{5}\lg a+\frac{3}{5}\lg b$;

$\lg 7+3\lg a+\lg b+\frac{1}{8}\lg c$.

188. $x=\sqrt{a}$; $x=\sqrt[3]{ab}$.

251. $a=-13$.

252. 1) $x=0$, $y=5$; $x=2$, $y=2$; 2) $x=1+5t$; $y=30-7t$.

פאָזיטיווע לייזונגענ וועלנ זיינ בא $t=0, 1, 2, 3, 4$.

.252 ביידע גלייכונגענ האָבנ ניט קיינ גאנצע פאָזיטיווע לייזונגענ.

253. 1) $x=5$, $y=0$; 2) $x=3$, $y=5$.

254. 56 אונ 44.

255. 19 אונ 7 אָדער 6 אונ 18.

256. 6 אונ 1 אָדער 2 אונ 4.

257. $59+77t$.

.277 7-טע. אָנווייזונג. מע דארפ נעמענ א פאָרמולע פארנ אלגעמיינעמ גליד פונ דער צעגלידערונג, אונטערשטעלנ אָנשטאָט a אונ x די גלידער פונ דעמ געגעבענעמ בינאָמ אונ נאָכ די פארייניפאכונגענ צוגלייכנ צו נול דעמ ווייזער באמ x.

א י נ ה א ל ט

פאָרוואָרט . . . .

ערשטער אָפטייל.

אידענטישע אומבילדונגען מיט מאדרייגעס און וואָרצלען.

I. דערהייבן אין א מאדרייגע.

1. אקט פון דערהייבן אין א מאדרייגע. 2. די מאדרייגע פון א נעגאטיווער צאָל. 3. דערהייבן אין א מאדרייגע אייגגלידער. . . . . . 5—6

די דערהייבונג פון א פילגליד אין קוואדראט.

4. די אויספירונג פון דער פאָרמולע. 5. באמערקונג וועגן צייכנס. געניטונגען . 7—9

II. ארויסציִען א וואָרצל.

6. דעפיניציע, 7. איראציאָנעלע צאָלן. 8. אומגעפערע וואָרצלען פון יעטווידער מאדרייגע. 9. איראציאָנעלע צאָלן אפ דער צאָלן־אקס. 10. דער זין פון אקטן מיט איראציאָנעלע צאָלן. 11. ארויסציִען א וואָרצל פון רעליאטיווע צאָלן. 12. שײַנבארע צאָלן. . . . 9—16

III. אומבילדונג פון איראציאָנעלע אויסדרוקן.

13. ראציאָנעלע און איראציאָנעלע אלגעבראישע אויסדרוקן. 14. גרונט-אייגנשאפט פון א ראדיקאל. 15. ארויסציִען א וואָרצל פון א קייפל־פראָדוקט, פון א מאדרייגע און פון א ברוכצאָל. 16. אייגפאכסטע אומבילדונגען פון ראדיקאלן. געניטונגען. 17. ענלעכע ראדיקאלן. געניטונגען. 18. אקטן איבער איראציאָנעלע אייגגלידער. געניטונגען. 19. אקטן איבער איראציאָנעלע פילגלידער. געניטונגען. 20. באפרײַען דעם ברוכצאָל־דײַטער פון ראדיקאלן. געניטונגען . . . . 16—28

IV. איראציאָנעלע גלײַכונגען.

21. אויפגאבע. 22. זײַטיקע לייזונגען. 23. באפרײַען א גלײַכונג פון צווײ קוואדראטע ראדיקאלן. געניטונגען. . . . . 28—31

צווייטער אָפטייל.

פונקציעס און זייערע גראפיקעס.

I. פונקציאָנעלע אָפהענגיקײַט.

24. קאָנסטאנטע און פארענדערלעכע גרייסן. 25. ארגומענט און פונקציע. 26. דרײַ אויפאנים פון אויסדריקן א פונקציאָנעלע אָפהענגיקײַט. 27. קאָאָרדינאטן־מעטאָד. 28. די לאגע פון א פונקט אפ א פלאך. געניטונגען. . . . . . . 32—40

II. גלײַכע און פארקערטע פראָפּאָרציאָנעלקײַט.

29. גלײַכ־פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקײַט. 30. דער אויסדרוק פונ א פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקײַט דורכ א פאָרמולע. 31. פארקערט־פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּהענגיקײַט. 32. אויסדריקנ א פארקערטע פּראָפּאָרציאָנעלע פארהעלטעניש דורכ א פאָרמולע. גענִיטונגענ. 33. גראפיק פונ גלײַכ־פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּהענגיקײַט. 34. ענדערונג אינ דער לאגע פונ דער גראָדער, אָפּהענגיק פונ דעמ, ווי עס ענדערט זיכ דער קאָעפיציענט פונ פּראָפּאָרציאָנעלקײַט. 35. גראפיק פונ פארקערטער פּראָפּאָרציאָנעלקײַט. גענִיטונגענ. . . . 40—49

III. לינעאלע פונקציע.

36. צווייגליר פונ דער ערשטער מאדרייגע. אויפגאבע. 37. גראפיק פונ א צווייגליד פונ דער ערשטער מאדרייגע. 38. ענדערונג פונעמ צווייגליד $y=ax+b$ בא דער ענדערונג פונעמ x. 39. באמערקונגענ. 40. קאָנסטרויִרונג פונ דער גראָדער $y=ax+b$ לויט צוויי פונקטנ. גענִיטונגענ. . . . . 49—55

דריטער אָפּטייל.

קוואדראטע פונקציע

I. צוגאָב־יעדיִעס וועגנ קוואדראטע גלײַכונגענ.

41. פאָרמולע פונ די וואָרצלענ פונ א קוואדראטער גלײַכונג. 42. דיסקרימינאנט. 43. צוויי אייגנשאפטנ פונ די וואָרצלענ בא א קוואדראטער גלײַכונג (וויעטאס טעאָרעמע). גענִיטונגענ. 44. דרײַגליד פונ דער צווייטער מאדרייגע. 45. פאנאנדערלייגנ א דרײַגליד פונ דער צווייטער מאדרייגע. גענִיטונגענ. . . . . 56—63

II. גראפיק פונ א קוואדראטער פונקציע.

46. גראפיק פונ דער פונקציע $y=x^2$. 47. גראפיק פונ דער פונקציע $y=ax^2$. 48. גראפיק פונ דער פונקציע $y=ax^2+b$. גענִיטונגענ. 49. גראפיק פונ א דרײַגליד פונ דער צווייטער מאדרייגע. 50. גראפישע לייזונג פונ א קוואדראטער גלײַכונג. גענִיטונגענ. 51. ביקוואדראטע גלײַכונג. 52. גלײַכונגענ, וואָס זייער לינקער טייל לייגט זיכ פאנאנדער אפ קייפלערס און דער רעכטער איז גלײַכ צו נול. גענִיטונגענ. 53. צווייגלידערדיקע גלײַכונג. 54. לייזנ צווייגלידערדיקע גלײַכונגענ פונ דער דריטער מאדרייגע. 55. פארשיידענע באדײַטונגענ פונ וואָרצל. 56. דרײַגלידערדיקע גלײַכונג. גענִיטונגענ. . 63—77

III. סיסטעמעס גלײַכונגענ פונ דער צווייטער מאדרייגע.

57. וואָס רופט זיכ א מאדרייגע פונ א גלײַכונג מיט עטלעכע אומבאוווסטע. 58. די אלגעמיינע געשטאלט פונ א פולער גלײַכונג פונ דער צווייטער מאדרייגע מיט צוויי אומבאוווסטע. 59. סיסטעמ פונ צוויי גלײַכונגענ, וואָס איינע פונ זיי איז פונ דער ערשטער מאדרייגע, און די צווייטע—פונ דער צווייטער. 60. קינסטלעכע מעטאָדנ. 61. סיסטעמ פונ צוויי גלײַכונגענ, וואָס יעדערע פונ זיי איז פונ דער צווייטער מאדרייגע. 62. גראפישער מיטל פונ לייזונג. גענִיטונגענ. . . . . 77—85

פערטער אָפּטייל.

I. אומגלײַכקײַטנ.

63. פאָרבאמערקונג. 64. גרונט־אייגנשאפטנ פונ די אומגלײַכקײַטנ. 65. צווייערליי פראגנ בענעגייע אומגלײַכקײַטנ. 66. גלײַכבאטרעפיקע אומגלײַכקײַטנ. 67. טעאָרעמע 1. 68. טעאָרעמע 2. 69. טעאָרעמע 3. 70. באווײַז פונ אנ אומגלײַכקײַט. 71. לייזונג פונ אנ אומגלײַכקײַט פונ דער ערשטער מאדרייגע מיט איינ אומבאוווסטנ. 72. צוויי אומגלײַכקײַטנ פונ דער ערשטער מאדרייגע מיט איינ אומבאוווסטער. גענִיטונגענ . . . 86—96

פינפטער אָפטײל.

פּראָגרעסיעס.

I. אריפמעטישע פּראָגרעסיע.

73. אופגאבע. 74. דעפיניציע. 75. פאָרמולע פונ יעטווידער גליד פונ אנ אריפמעטישער פּראָגרעסיע. 76. פאָרמולע פאר דער סומע פונ אלע גלידער פונ אנ אריפמעטישער פּראָגרעסיע. 77. באמערקונג. 78. פאָרמולע פאר דער סומע פונ די קוואדראטנ פונ צאָלנ פונ דער נאטורלעכער רײ. געניטונגענ . . . . . . 97—105

II. געאָמעטרישע פּראָגרעסיע.

79. אופגאבע. 80. דעפיניציע. 81. פארגלײַכונג פונ א ג. מיט אנ אר. פּר. 82. פאָרמולע פונ יעטווידער גליד פונ א ג. פּר. 83. פאָרמולע פאר דער סומע פונ אלע גלידער בא א געאָמעטרישער פּראָגרעסיע. 84. בײַשפּיל פונ אנ אופגאבע אפ א געאָמעטרישער פּראָגרעסיע. געניטונגענ . . . . . . 105—112

III. אומענדלעכע פּראָגרעסיעס.

85. אײניקע אײגנשאפטנ פונ אזוינע פּראָגרעסיעס. 86. באגריפ וועגנ לימיט. 87. פאָרמולע פאר דעמ לימיט פונ דער סומע בא אנ אומענדלעכ־פאלנדיקער געאָמעטרישער פּראָגרעסיע. 88. די אָנווענדונג פונ א ג. פּר. צו דעצימאלע פעריאָדישע ברוכצאָלנ. געניטונגענ. . . . . 112—119

זעקסטער אָפטײל.

פאראלגעמײנערונג פונעמ באגריפ וועגנ ווײַזערס.

I. גאנצע מאדרײגע־ווײַזערס.

89. אײגנשאפטנ פונ גאנצע פּאָזיטיווע ווײַזערס. 90. גוליקער ווײַזער. 91. נעגאטיווע גאנצע ווײַזערס. 92. אקטנ איבער מאדרײגעס מיט נעגאטיווע ווײַזערס. געניטונגענ. 120—124

II. ברוכצאָליקע ווײַזערס.

93. אינ וואָס פאר א זינ ווערנ באנוצט ברוכצאָליקע ווײַזערס. 94. די גרונט־אײגנשאפט פונ א ברוכצאָליקנ ווײַזער. 95. אקטנ איבער מאדרײגעס מיט ברוכצאָליקע ווײַזערס. 96. בײַשפּילנ אפ אקטנ מיט ברוכצאָליקע אונ נעגאטיווע ווײַזערס. געניטונגענ . 124—128

III. באגריפ וועגנ איראציאָנעלנ ווײַזער.

97. דער מאדרײגע a^a . . . . 128—129

IV. ווײַזער־פונקציע.

98. דעפיניציע. 99. אײגנשאפטנ פונ א ווײַזער־פונקציע. 100. גראפיק פונ א ווײַזער־פונקציע. געניטונגענ. . . . . 129—134

זיבעטער אָפטײל.

לאָגאריפמענ.

I. אלגעמײנע אײגנשאפטנ פונ לאָגאריפמענ.

101. צווײ אקטנ, פארקערטע צו דערהײבנ אינ א מאדרײגע. 102. דעפיניציע. 103. די לאָגאריפמישע פונקציע אונ איר גראפיק. 104. די גרונט־אײגנשאפטנ פונ לאָגאריפמענ. געניטונגענ. 105. באגריפ וועגנ דעמ נוצנ פונ לאָגאריפמישע טאבעלעס. 106. לאָגאריפמ פונ א קײפל־פּראָדוקט, א טײלווערט, א מאדרײגע אונ א וואָרצל. 107. לאָגאריפמירונג פונ אנ אלגעבראישנ אויסדרוק. 108. באמערקונגענ. געניטונגענ. . . . 135—146

II. אייגנשאַפטן פון דעצימאַלע לאָגאַריפמען.

109. 110. אויספירן. געניטונגען. . . . . . . 146—151

III. געבוי און באַנוץ פון די טאַבעלעס.

111. לאָגאַריפמען־סיסטעם. 112. אומבילדונג פון אַ נעגאַטיוון לאָגאַריפם. 113. באַשרײַבונג פון פירציפערדיקע טאַבעלעס און דאָס באַנוצן זיך מיט זיי. 114. אינטערפּאָלירונג. 115. טאַבעלעס פון אַנטי־לאָגאַריפמען. 116. באַמערקונג וועגן אינטערפּאָלירונג. 117. אַקטן איבער לאָגאַריפמען מיט נעגאַטיווע כאַראַקטעריסטיקעס. 118. פאַרבײַטן כיסער פון לאָגאַריפמען אויף כיבער. 119. בײַשפּילן אויף אויסרעכענונגען מיט דער הילף פון לאָגאַריפמען. געניטונגען. 120. דער באַנוץ פון פינפציפערדיקע טאַבעלעס . 152—164

IV. ווײַזערדיקע און לאָגאַריפמישע גלײַכונגען.

121. אויפגאַבע. בײַשפּילן פון גלײַכונגען. 122. פאָרמולע פון קאָמפּליצירטע פּראָצענטן. געניטונגען. . . . . 164—168

אַכטער אָפּטייל.

אויספאָרשונג פון גלײַכונגען.

I. אויספאָרשונג פון גלײַכונגען פון דער ערשטער מאַדרייגע מיט איין אומבאַוווּסטן.

123. וואָס הייסט אויספאָרשן אַ גלײַכונג? 124. די אַלגעמיינע פאָרם פון אַ גלײַכונג פון דער ערשטער מאַדרייגע מיט איין אומבאַוווּסטן. 125. פּאָזיטיווע לייזונג. 126. נעגאַטיווע לייזונג. 127. נוליקע לייזונג. 128. דער פאַל, ווען די גלײַכונג האָט ניט קיין וואָרצל. 129. ווי דאַרף מען פאַרשטיין די גלײַכקייט $\frac{m}{o}=\pm\infty$. 130. אומענדלעכער וואָרצל. 131. אומבאַשטימטע לייזונג. 132. די גראַפישע אויסטײַטשונג פון דער לייזונג פון דער גלײַכונג $ax = b$. געניטונגען. . . . . . 169—176

II. די אויספאָרשונג פון אַ סיסטעם פון צוויי גלײַכונגען פון דער ערשטער מאַדרייגע מיט צוויי אומבאַוווּסטע.

III. די אויספאָרשונג פון אַ קוואַדראַט־גלײַכונג.

133. אַלגעמיינע פאָרמולעס. 134. די אויספאָרשונג . . . . 177—179

135. די אויספאָרשונג פון די פאָרמולעס. 136. די אויפגאַבע וועגן צוויי קוואַלן פון ליכט . . . . 179—183

נײַנטער אָפּטייל.

I שײַנבאַרע און קאָמפּלעקסע צאָלן.

137. שײַנבאַרע צאָלן. 138. קאָמפּלעקס־צאָלן. 139. די אַקטן איבער קאָמפּלעקס־צאָלן. 140. געאָמעטרישע פאָרשטעלונג פון אַ קאָמפּלעקס־צאָל. געניטונגען. . . 184—190

צענטער אָפּטייל.

איייניקע ידיעס וועגן אַלגעבראַאישע גלײַכונגען.

I. טיילבאַרקייט פון אַ פילגליד.

141. בעזוס טעאָרעמע. די טיילבאַרקייט פון אַ פילגליד, אַ גאַנצן אין באַצוג צו x, אויף דער דיפערענץ $x - a$. 142. די טיילבאַרקייט פונעם צווייגליד $x^m \mp a^m$ אויף $x \mp a$. 143. טיילווערטן, וואָס ווערן באַקומען באַם טיילן $x^m \mp a^m$ אויף $x \mp a$. 144. אַלגעמיינע געשטאַלט פון אַן אַלגעבראַאישער גלײַכונג. 145. איייניקע אייגנשאַפטן פון אַן אַלגעבראַאישער גלײַכונג. . . . . 191—198

עלפטער אָפטייל.

I. אומבאשטימטע גלייַכונג.

146. ארייַנפיר-באמערקונגענ. 147. סימענ פונ דער אומעגלעכקייַט צו לייזנ א גלייַכונג אינ גאנצע צאָלנ. 148. סימענ פונ אומעגלעכקייַט צו לייזנ גלייַכונגענ אינ פּאָזיטיווע צאָלנ. 149. אלגעמיינע פאָרמולע פונ די וואָרצלענ פונ אנ אומבאשטימטער גלייַכונג. 150. אויפנ פונ אונטערשטעלנ. 151. באזונדערער פאל פונ אנ אומבאשטימטער גלייַכונג. 152. אלגעמיינע לייזונג פונ אנ אומבאשטימטער גלייַכונג. 153. פארייַנפאכונג פונ א גלייַכונג. 154. פּאָזיטיווע לייזונגענ. געניטונגענ. . . . . . 199—215

צוועלפטער אָפּטייל.

פארייניקונגענ און ניוטאָנס בינאָם.

I. פארייניקונגענ.

155. דעפיניציע. 156. פּאנאנדערשטעלונגענ. 157. אופגאבעס. 158. איבערשטעלונגענ. 159. אופגאבעס. 160. קאָמבינירונגענ. 161. א צווייטע פאָרמ פונ דער פאָרמולע פונ קאָמבינירונגענ. 162. די אייגנשאפט פונ קאָמבינירונגענ. געניטונגענ. . . . 216—223

II. ניוטאָנס בינאָם.

163. פּראָדוקט פונ בינאָמענ, וואָס אונטערשיידנ זיכ בלויז מיט די צווייטע גלידער. 164. פאָרמולע פונ ניוטאָנס בינאָם. 165. די אייגנשאפטנ פונ דער פאָרמולע פונ ניוטאָנס בינאָם. 166. אָנווענדונג פונ דער פאָרמולע פונ בינאָם צו א פּילגליד. געניטונגענ. 223—229

III. געשטאפלטע ברוכצאָלנ.

167. דעפיניציע פונ געשטאפלטע ברוכצאָלנ. 168. פארוואנדלענ ענדלעכע געשטאפלטע ברוכצאָלנ אינ געוויינלעכע. 169. פארוואנדלענ געוויינלעכע ברוכצאָלנ אינ ענדלעכע געשטאפלטע. 170. רעדוצירטע ברוכצאָלנ. 171. געזעצ פונ צונויפשטעלנ רעדוצירטע ברוכ־צאָלנ. 172. טעאָרעמע 1. 173. טעאָרעמע 2. 174. טעאָרעמע 3. 175. דערנעענטערונג פונ א געגעבענער אריפמעטישער ברוכצאָל. 176. דאָס ארויסציִענ דעמ קוואדראט־וואָרצל. 177. געפינענ די פּאָר לייזונגענ פונ אנ אומבאשטימטער גלייַכונג. 178. די אויסרעכענונג פונ לאָגאריפמ. . . . . 230—246

IV. וועגנ לימיטנ.

179. דעפיניציעס. 180. אייניקע אייגנשאפטנ פונ די אומענדלעכ קליינע צאָלנ. 181. די אייגנשאפטנ פונ די לימיטנ. געניטונגענ . . . . . . 246—254
ענטפערס צו די געניטונגענ. . . . . . . 255—256